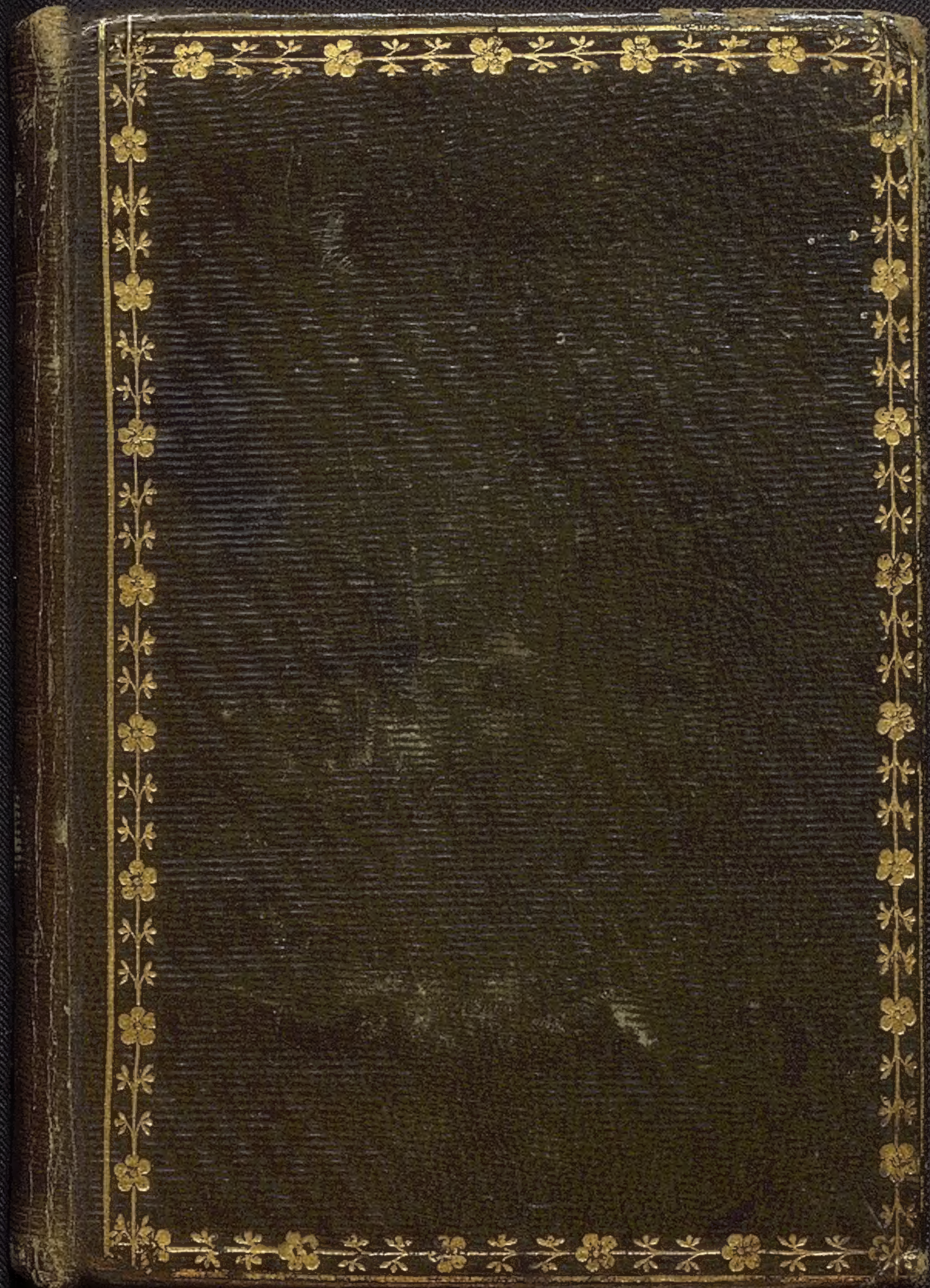


РУЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЕНЦИКЛОПЕДІЯ.

Книжка I.

АРИѲМЕТИКА.



МОСКВА
Въ Университетской Типографіи.
1826.

Печатать дозволяется съ тѣмъ, чтобы по отпечатаніи, до выпуска въ продажу, представлены были въ Ценсурный Комитетъ: одинъ экземпляръ для Ценсурнаго Комитета, другой для Департамента Министерства просвѣщенія, два экземпляра для Императорской публичной Библіотеки и одинъ для Императорской Академіи Наукъ. Москва, Февраля 11го дня, 1826 года.

Ординарный Профессоръ, Коллежскій Совѣтникъ и Кавалеръ Федоръ Чумаковъ.



ЕГО ПРЕВОСХОДИТЕЛЬСТВУ

Господину

Генералъ-Маіору, Императорскаго Московскаго Университета и его учебнаго округа Попечителю и Орденовъ Россійскихъ: Св. Анны первой степени, Св. Великомученика и Побѣдоносца Георгія третьяго класса и Св. Владиміра третьей степени; Иностранныхъ: Прусскаго, Pour le mérite, Сардинскаго Св. Маврикія и Св. Лазаря первой степени.

Кавалеру,

Александру Александровичу

Писареву,

Знаменитому Покровителю наукъ.

Усерднѣйшее приношеніе

Д. Перевощикова соч.

А. Ширяева изд.



АРИѲМЕТИКА

УВѢДОМЛЕНІЕ.

Ручная Математическая Энциклопедія будетъ состоять изъ слѣдующихъ частей:

1. Ариѳметика.

2. Геометрія.

3. Алгебра.

4. Приложеніе Алгебры къ Геометріи.

5. Теоріи Дифференціальнаго и Интегральнаго изчисленій.

6. Высшая или криволинейная Геометрія.

7. Начертательная Геометрія.

8. Статика.

9. Динамика.

10. Гидростатика и Гидродинамика.

11. Оптика.

12. Физика.

13. Астрономія.

Ежели непредвидимыя обстоятельства не воспрепятствуютъ, и благосклонное вниманіе читателей подкрѣпитъ силы предпринявшаго сей трудъ; то всѣ его части выйдутъ въ свѣтъ одна за

другою непосредственно и въ непродолжительномъ времени.

Каждая часть будетъ продаваться особенно. Кто соберетъ всѣ части, тотъ составитъ небольшую библіотеку, содержащую Физико-Математическія науки въ ихъ нынѣшнемъ усовершенствованномъ состояніи.

Желая облегчить пріобрѣтеніе познаній Ариѳметическихъ, необходимыхъ во всякомъ состояніи, сочинитель рѣшился предложить Ариѳме-

тику въ видѣ разговора между двумя разсуждающими особами. Для прочихъ частей Енциклопедіи такая форма изложенія неудобна и не нужна.

Д. Перевощиковъ.



УРОКЪ I.

Предварительныя понятія.

В. Какимъ образомъ получаемъ понятіе о величинѣ окружающихъ насъ предметовъ?

От. Для сего сравниваемъ ихъ между собою. Но чтобъ изъ сравненія можно было выводить точныя заключенія, выбираютъ изъ каждаго рода предметовъ по одному, назначаютъ ему определенную величину съ тѣмъ условіемъ, чтобъ она оставалась навсегда или на долгое время непремѣнною, и потомъ уже употребляютъ его для взаимнаго сравненія однородныхъ предметовъ.

В. Не льзя ли объяснить это примѣрами?

От. Въ Россіи употребительнѣйшая мѣра для протяженій есть

аршинъ: ежели захотимъ узнать, на примѣръ, величину двухъ разстояній между тремя домами, то накладывая аршинъ на сіи разстоянія, найдемъ сколько разъ содержится онъ въ каждомъ изъ нихъ; пусть въ первомъ разстояніи аршинъ будетъ содержаться *восемь* разъ, а во второмъ *четыре* раза: изъ етого должно заключить, что первое разстояніе *вдвое* болѣе втораго.

В. Скажите еще примѣръ?

От. Деньги измѣряемъ или считаемъ *рублями:* если у одного человѣка найдется *сто* рублей, у другаго же *двадцать пять:* то первой изъ нихъ *вчетверо* богаче втораго.

В. И такъ *считать, вѣсить, измѣрять* значитъ сравнивать вещи съ одною однородною?

От. Точно такъ, и потому всѣ упомянутыя три дѣйствія разумѣютъ подъ одимъ названіемъ *измѣрять.*

В. Какъ называются мѣры, посредствомъ которыхъ опредѣляются величины предметовъ?

От. *Единицами* : *рубль* есть единица для монетъ, *аршинъ* — единица для протяженій, *пудъ* — единица для тяжестей, *сутки* — единица для времени, и т. д.

В. Сравнивая какую нибудь единицу съ однородною ей вещью, находимъ, что первая содержится во второй *два*, *пять*, *девять*, и пр. разъ; изъ етого получаемъ понятіе о величинѣ вещи вразсужденіи единицы или объ ихъ *отношеніи*, которое въ первомъ случаѣ означается словомъ *два*, во второмъ — словомъ *пять*, и пр : не имѣютъ ли сіи отношенія общаго названія?

От. Имѣютъ. Всякое отношеніе единицы къ однородной вещи называютъ *числомъ* или *количествомъ*: такимъ образомъ *два*, *пять*, *девять* и пр. суть числа.

В. Теперь не можно ли объяснить подробнѣе составленіе чиселъ?

От. Вотъ какимъ образомъ они составляются:

Одна и *одна* единица составляютъ *двѣ* единицы
Двѣ и одна . . . *три* ——
Три и одна . . . *четыре* —
Четыре и одна . . *пять* ——
Пять и одна . . *шесть* —
Шесть и одна . . *семь* ——
Семь и одна . . . *восемь* —
Восемь и одна . . *девять* —
Девять и одна . . *десять* —
Десять единицъ или *десятокъ* принимаютъ за единицу втораго порядка и продолжаютъ счетъ по прежнему, говоря:
Десять и одна . . *одиннадцать*
Одиннадцать и одна *двѣнадцать*,
Двѣнадцать и одна *тринадцать*.
Тринадцать и одна *четырнадцать*
Четырнадцать и одна *пятнадцать*
Пятнадцать и одна *шестнадцать*.

Шестнадцать и одна *семнадцать;*
Семнадцать и одна *осьмнадцать*,
Осьмнадцать и одна *девятнадцать*,
Девятнадцать и одна *двадцать.*

И такъ *двадцать* означаетъ собраніе двухъ десятковъ единицъ; присоединивъ къ двадцати еще девять единицъ, получимъ три десятка или *тридцать*, потомъ *сорокъ*, *пятьдесять*, . . . *девяносто* содержитъ девять десятковъ, а *сто* или *сотня* — десять десятковъ. Сотни принимаютъ за единицы третьяго порядка и считаютъ ихъ подобно десяткамъ до десяти: десять сотенъ называютъ *тысячью*, которая есть единица четвертаго порядка. Насчитавши десять сотенъ тысячь, составляютъ единицу пятаго порядка, называемую *милліономъ;* собраніе десяти сотенъ тысячь милліоновъ есть *билліонъ.* Такимъ же образомъ изъ билліоновъ составляются *трилліоны;* и т. д.

В. Изъ сказаннаго должно заключить, что нашъ счетъ не простирается далѣе десяти?

От. Точно такъ, и сей способъ счисленія даетъ возможность изображать числа особенными знаками съ чрезвычайною удобностью и простотою.

В. Какіе же сіи знаки?

От. Ихъ называютъ *цыфрами*, и они суть:

1	означаетъ	одну	единицу
2	——	двѣ	——
3	——	три	——
4	——	четыре	—
5	——	пять	——
6	——	шесть	——
7	——	семь	——
8	——	восемь	
9	——	девять	

В. Не уже ли сими девятью знаками можно изображать всѣ возможныя числа или отношенія единицъ къ измѣряемымъ предметамъ?

От. Вотъ какимъ образомъ преодолѣли сіе затрудненіе: мы видѣли уже, что счетъ простирается только до десяти; слѣд. надобно было найти средство изображать десять; для сего условились писать цыфры отъ правой руки къ лѣвой съ тою перемѣною ихъ знаменованія, что вторая цыфра означаетъ уже десятки, третья — сотни, четвертая — тысячи, пятая — десятки тысячь, и т. д. напр. въ рядѣ 2222 первая цыфра 2 отъ правой руки означаетъ 2 единицы, вторая — 2 десятка, третья — 2 сотни, четвертая — 2 тысячи; слѣд. всѣ сіи четыре цыфры выражаютъ *двѣ тысячи двѣсти двадцать двѣ единицы.*

В. Но какъ изобразить *двадцать*, *триста*, *пять тысячь?*

От. Въ первомъ числѣ нѣтъ простыхъ единицъ, во второмъ — десятковъ и единицъ, въ третьемъ — сотенъ, десятковъ и единицъ: поетому надобно только означить сіи

недостающіе порядки единицъ; *для* сего употребляютъ знакъ (о), называемый *нулемъ*; такъ что

Двадцать изображаютъ чрезъ 20,
Триста 300,
Пять тысячь . . . . . 5000.

В. Етотъ *нуль* можно поставлять и въ срединѣ цыфръ?

От. Безъ сомнѣнія. Вообще онъ пишется на томъ мѣстѣ, на которомъ должна находиться недостающая единица какого бы ни была она порядка. На прим. число *семь милліоновъ три единицы* надобно изобразить такъ: 7000003; потому что въ немъ нѣтъ десятковъ, сотенъ, тысячь, десятковъ и сотенъ тысячь.

В. Все ето очень просто и понятно. Но если число многосложно, то нѣтъ ли средства, помощію котораго можно было бы безъ труда помнить всѣ порядки единицъ, составляющіе сіе число?

От. Есть: для объясненія его возмемъ примѣръ. Положимъ, что требуется прочитать такое число:

507201034057087239
II I

Послику главныя раздѣленія нашего счисленія суть милліоны, билліоны, трилліоны, и пр.; то цифру первыхъ будемъ означать чрезъ (I), вторыхъ чрезъ (II), третьихъ чрезъ (III), и пр. Посему знакъ (I) должно поставить на седьмой цыфрѣ отъ правой руки, знакъ (II) на тринадцатой и т. д. все чрезъ шесть цыфръ. Замѣтивши такимъ образомъ сіи главныя раздѣленія, подраздѣленія оныхъ можно уже помнить безъ особеннаго означенія. Сдѣлавши сіе съ даннымъ числомъ, тотчасъ усматриваемъ, что въ немъ содержится

Пять сотъ семь тысячь двѣсти одинъ билліонъ;

Тридцать четыре тысячи пятьдесять семь милліоновъ;

Восемьдесять семь тысячь двѣсти тридцать девять единицъ.

В. И такъ число

1203040507090000102090700000
IV III II I

содержитъ

Сто двадцать квадралліоновъ;

Триста четыре тысячи пятьдесять трилліоновъ;

Семь сотъ девять тысячь билліоновъ;

Десять тысячь двѣсти девять милліоновъ;

Семьдесять тысячь единицъ?

От. Точно такъ.

В. До сихъ поръ мы говорили о числахъ, которыя выражаютъ точныя отношенія единицы къ измѣряемому предмету, или о числахъ *цѣлыхъ:* но если при измѣреніи, на пр., какого-нибудь протяженія усмотримъ, что мѣра содержится въ немъ нѣсколько разъ съ остаткомъ, который менѣе сей мѣры; или, если надобно будетъ вымѣрить вещь,

меньшую мѣры; то какимъ образомъ должно поступать въ сихъ случаяхъ?

От. Тогда должно раздѣлить мѣру или единицу на нѣсколько равныхъ частей, — всего лучше на *десять*, — и смотрѣть, сколько разъ одна изъ сихъ частей содержится въ остаткѣ или въ вещи, которая меньше единицы.

В. Объясните примѣромъ?

От. Россійской пудъ дѣлится на 40 частей или фунтовъ: если въ какой нибудь тяжести окажется болѣе 3хъ пудъ, то надобно прибавить къ гирямъ нѣсколько фунтовъ, на примѣръ 5. Изъ сего заключаемъ, что взвѣшиваемая тяжесть содержитъ 3 пуда, 5 фун.; но какъ фунтъ есть сороковая доля пуда, то и можно сказать, что сія тяжесть содержитъ 3 пуда и 5 сороковыхъ его долей.

Еще примѣръ: если длина какой нибудь вещи менѣе аршина, то для измѣренія оной раздѣляютъ аршинъ

или на четыре или на 16 равныхъ частей. Положимъ, что послѣднихъ частей будетъ содержаться 7; слѣд. длина измѣряемой вещи равняется 7 шестьнадцатымъ долямъ аршина, или, какъ обыкновенно говорятъ, 7 *вершкамъ*.

В. Какъ же называются сіи числа, показывающія отношеніе не цѣлой единицы, но какой нибудь ея доли къ измѣряемому предмету?

От. Они называются *дробями.*

В. Что надобно знать, чтобъ имѣть понятіе о величинѣ дроби?

От. Должно знать, на сколько частей раздѣлена единица, и сколько разъ одна изъ сихъ частей повторяется въ измѣряемой вещи.

В. И такъ для изображенія дроби надобно употреблять два числа?

От. Точно: одно должно показывать, на сколько частей единица дѣлится, или выражать величину сихъ частей; а другимъ означаютъ

число сихъ частей. Послѣднее число пишутъ надъ первымъ, отдѣливъ отъ онаго чертою; такъ $\frac{8}{11}$ значитъ, что какая-нибудь единица раздѣлена на 11 равныхъ частей, изъ коихъ одна повторилась восемь разъ. Впрочемъ подробнѣе о семъ предметѣ будемъ говорить послѣ.

В. И такъ числа могутъ быть *цѣлыя, дробныя* или просто *дроби?*

От. Есть еще и третій родъ чиселъ, которыя называются *ирраціональными;* но произхожденіе оныхъ объяснимъ послѣ, разсмотрѣвши свойства чиселъ, принадлежащихъ къ упомянутымъ двумъ родамъ. Теперь же въ заключеніе урока скажемъ, что *наука, въ которой объясняются свойства чиселъ и всѣ основные способы вычисленій, есть* Ариѳметика.

УРОКЪ II.

О главныхъ четырехъ дѣйствіяхъ.

---

1. *О сложеніи.*

В. Разсмотрѣвши произхожденіе и изображеніе чиселъ, приступаемъ къ главнымъ Ариѳметическимъ дѣйствіямъ, изъ коихъ основное есть *сложеніе:* какіе же вопросы разрѣшаютъ посредствомъ сего дѣйствія?

От. Самое названіе (сложеніе) показываетъ уже, что сіе дѣйствіе состоитъ въ соединеніи многихъ чиселъ въ одно число; слѣд. посредствомъ его разрѣшаются тѣ вопросы, въ которыхъ даются нѣсколько извѣстныхъ чиселъ и требуется соединить ихъ въ одно. На примѣръ, сколько продано пудовъ какого нибудь товара въ три раза, когда въ первый разъ продано было 8, во

второй — 7, и въ третій — 3 пуда? Чтобъ сіи числа соединить въ одно, сперва отсчитываю 2 отъ 7 и придаю ихъ къ 8: получаю 10; но какъ въ 7 остается 5, то вижу тотчасъ, что 8 и 7 составляютъ 15 приложивши теперь 3 къ 15, нахожу 18, и ето число есть искомое, разрѣшающее вопросъ.

В. Изъ етого дѣйствія усматриваю, что при соединеніи чиселъ, выражаемыхъ одною цыфрою, должно для удобности составлять изъ нихъ сперва десятки. На примѣръ, какое выйдетъ число, когда сложимъ 9 съ 8 съ 7 съ 5 съ 9?

От. Ето замѣчаніе справедливо и для начинающихъ весьма полезно. Предложенный вопросъ разрѣшаю такъ: поелику 9 и 1 составляютъ 10, и 8 равняется 7 съ 1, слѣд. 9 и 8 даютъ 17. Потомъ опять 7 и 3 даютъ 10, а 7 содержитъ 3 и 4; слѣд. 17 и 7 составляютъ 24. Далѣе 4 и 5 даютъ 9: слѣд. 24 и 5

тоже что 29. Наконецъ отсчитавши 1 отъ послѣднихъ придаваемыхъ 9, получаю 30, а съ остаткомъ изъ 9 выйдетъ 38. — Надобно замѣтить, что хотя описанное средство по наружности продолжительно; однако многократное упражненіе доводитъ до того, что изъясненный расчетъ производимъ весьма скоро, даже нечувствительно.

В. Но когда слагаемыя числа многосложны, тогда какимъ образомъ должно соединять ихъ съ возможною удобностью?

От. Прежде всего замѣтимъ, что слово *сложить* изображаютъ чрезъ (+); если, на примѣръ, требуется 5 сложить съ 6, то пишутъ такъ: 5+6. Потомъ: поелику 5+6 равняются 11, то вмѣсто слова *равняются* проводятъ двѣ черты (=), такъ что 5+6=11. Наконецъ: сложить значитъ сосчитать, сколько въ данныхъ числахъ содержится единицъ, десятковъ, сотенъ,

тысячъ, и пр ; слѣд. стоитъ токмо соединять сіи роды единицъ порознь; а какъ при етомъ соединеніи единицы могутъ дать десятки, десятки — сотни, сотни — тысячи, и т. д.; то отъ единицъ отсчитываютъ десятки, отъ десятковъ — сотни, отъ сотенъ — тысячи, и т. д, и придаютъ ихъ къ даннымъ десяткамъ, сотнямъ, тысячамъ, и пр. Вотъ примѣръ: чему равняются 509068 + 7462 + 800090 + 8000 + 3600459 + 3333 + 5555 + 777? — Сосчитавши единицы, получаю 34, т. е. 4 единицы и 3 десятка, которые придаю къ десяткамъ и нахожу 44, т. е. 4 десятка и 4 сотни, которыя отнесши къ сотнямъ, насчитываю 27, т. е. 7 сотенъ и 2 тысячи; придавши ихъ къ тысячамъ, составляю 34, т. е. 4 тысячи и 3 десятка оныхъ; слѣд. сіи десятки надобно отнести къ десяткамъ тысячь: выйдетъ только 3; наконецъ сотенъ тысячь выходитъ 9, а милліоновъ 4.

И такъ 509068 + 7462 + 800090 + 8000 + 3600459 + 3333 + 5555 + 777 = 4934744.

В. Для большей удобности нельзя ли слагаемыя числа подписывать одно подъ другимъ, располагая единицы, десятки, сотни, и пр. въ однихъ столбцахъ?

От. Можно; и такое расположенiе слагаемыхъ чиселъ общеупотребительно. На примѣръ, чтобъ сложить 502 + 709009 + 9008 + 72030456, располагаю сiи числа такъ:

```
     502
  709009
    9008
72030456
--------
72748975
```

и весьма скоро соединяю ихъ въ 72748975.

В. Какъ называется число, въ которое соединяются слагаемыя числа?

От. *Суммою.*

В. Слагаемыя числа могутъ быть различны, слѣд. и равныя между собою: въ послѣднемъ случаѣ нельзя ли сдѣлать какихъ нибудь сокращеній для нахожденія суммы?

От. Етотъ вопросъ приводитъ ко второму дѣйствію Ариѳметическому, которое въ самомъ дѣлѣ есть только особенный случай сложенія.

2. *Объ умноженіи.*

В. Въ чемъ же состоитъ сей случай сложенія?

От. Возмемъ примѣръ: требуется найти сумму *четырехъ* равныхъ слагаемыхъ, изъ коихъ каждое есть 5, или сложить 5, само съ собою *три* раза. Основываясь на предыдущемъ, сіе требованіе должно выразить такъ: $5 + 5 + 5 + 5$; но когда число слагаемыхъ бываетъ велико, тогда подобныя выраженія ока-

зываются неудобными, и для сокращенія пишутъ только одно слагаемое со знакомъ (×) или (.), послѣ котораго поставляютъ число, означающее количество слагаемыхъ. Такимъ образомъ 5+5+5+5 сокращается въ 5×4; также 18+18+18+18+18+18 въ 18×6 или 18.6. Сократившии изображеніе сложенія въ томъ случаѣ, когда число соединяется само съ собою, называютъ его *умноженіемъ*, слагаемое число — *множимымъ*, показатель числа слагаемыхъ — *множителемъ*, и получаемую сумму — *произведеніемъ*.

Итакъ *помножить одно число на другое значитъ сложить первое само съ собою столько разъ, сколько во второмъ единицъ безъ одной.* Также: *сумма отъ произведенія отличается тѣмъ, что первая составляется изъ слагаемыхъ неравныхъ, а второе — изъ равныхъ.* На пр. если 15 составлено изъ 7 и 8, то 15 есть сумма; но 15 будетъ

произведеніе, когда составится изъ 5, 5 и 5. Въ первомъ случаѣ пишутъ 15=7+8, а во второмъ 15=5×3 или 5 . 3.

В. Изъ сказаннаго видно только, какимъ образомъ сокращается изображеніе сложенія, а не самое дѣйствіе?

От. Правда, но сокращеніе изображенія способствуетъ сокращенію дѣйствія. Ежели составимъ табличку, въ которой были бы означены всѣ произведенія, происходящія отъ взаимнаго перемноженія первыхъ девяти чиселъ, то посредствомъ сей таблички будемъ въ состояніи сокращать сложеніе или перемножать числа съ неожиданною удобностью. Составленіе такой таблицы приписываютъ Пиѳагору, одному изъ славнѣйшихъ древнихъ Греческихъ Философовъ: напишемъ ее и потомъ покажемъ употребленіе.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Теперь положимъ, что требуется 48 помножить на 7. Для рѣшенія сего вопроса разсуждаю, что 48 тогда повторится 7 разъ или сложится само съ собою шесть разъ, когда повторятся столько разъ 8 и 40 или 4 десятка; но изъ таблицы вижу, что $8 \times 7 = 56$, и $4 \times 7 = 28$; слѣд. тотчасъ нахожу, что въ искомомъ произведеніи будетъ содержаться 56 единицъ и 28 десятковъ, или 3 сотни, 3 десятка и 6 единицъ, или $48 \times 7 = 336$. Также

1729 × 6 даютъ 10374; ибо. . . .
9 × 6 = 54, т. е. 5 дес. и 4 ед.
20 × 6 = 120, — 2 дес. и 1 сот.
700 × 6 = 4200, — 4 тыс. и 2 сот.
1000 × 6 = 6000, — 6 тыс.

Соединивши сіи частныя произведенія въ одно общее, получаю 4 един., 7 десятковъ, 3 сотни и 10 тысячь. Должно замѣтить, что производство сего дѣйствія можно сократить тѣмъ, что частныя произведенія соединяются при самомъ умноженіи. На пр. помножая 8607 на 9, отъ повторенія единицъ нахожу 63; тотчасъ исключаю отсюда 6 десятк. и придаю ихъ къ произведенію десятковъ, которое есть 0; потомъ изъ 54 произведенія сотенъ исключаю 5 тысячь и прикладываю ихъ къ произведенію тысячь 72, получаю 77. И такъ полное произведеніе будетъ 77463. .

В. Изъ всѣхъ сихъ примѣровъ не должно ли вывести слѣдующее общее правило: *чтобъ данное число*

помножить на другое, выраженное одною цыфрою, должно посредствомъ Пиѳагоровой таблицы находить произведенія каждаго порядка единицъ множимаго, отдѣлять отъ нисшихъ порядковъ единицы высшія и придавать оныя къ ихъ однороднымъ?

От. Точно такъ.

В. Но если и множитель будетъ многосложный?

От. Чтобъ отвѣчать на сей вопросъ, замѣчаю: 1, поелику помножать на 2, 3, . . . 10, 100, 1000 . . ., значитъ увеличить множимое въ 2, 3. . ., 10, 100, 1000, . . . разъ; то для умноженія на 10 должно только единицы сдѣлать десятками, десятки — сотнями, сотни — тысячами и т. д, посему стоитъ токмо всѣ цыфры подвинуть на одно мѣсто къ лѣвой рукѣ, или съ правой руки приписать *нуль.* Такъ . . . . 546×10=5460. Но при помноженіи на 1000, единицы превращаются уже

въ тысячи, десятки — въ десятки тысячь, и т. д. или всѣ цыфры множимаго подвигаются на три мѣста къ лѣвой рукѣ; на пр. . . . . 546 × 1000 = 546000; 7000 × 10000 = 70000000. Вообще: *съ правой руки въ произведеніи выходитъ столько нулей, сколько оныхъ содержится въ множимомъ и множителѣ.*

2. Нетрудно понять, что если множитель увеличится въ 10, 100, . . разъ; то и произведеніе увеличится въ 10, 100, . . . разъ. Изъ сего слѣдуетъ, что когда потребуется помножить на 80, тогда умноживши сперва на 8, надобно произведеніе увеличить еще въ 10 разъ; также, чтобъ умножить на 40000, должно множимое повторить 4 раза, а потомъ произведеніе увеличить въ 10000 разъ.

Послѣ сихъ замѣчаній легко уже найти правило для перемноженія чиселъ многосложныхъ. Для примѣра возмемъ 5674 × 9050. Поелику въ семъ вопросѣ должно 5674 повто-

рить 50 и 9000 разъ, то помноживши 5674 на 5, произведенiе увеличиваю въ 10 разъ; получаю 283700; потомъ помноживши 5674 на 9, произведенiе 51066 увеличиваю въ 1000 разъ; нахожу 51066000. Соединивши сiи частныя произведенiя въ общее 51349700, оканчиваю задачу. Для удобности сiе производство располагается въ такомъ видѣ:

$$
\begin{array}{r}
5674 \times 9050 = 283700 \\
51066000 \\
\hline
51349700
\end{array}
$$

или подписываютъ множитель подъ множимымъ:

$$
\begin{array}{r}
5674 \\
9050 \\
\hline
283700 \\
51066000 \\
\hline
51349700
\end{array}
$$

Притомъ должно замѣтить, что нули, поставляемые съ правой руки втораго, третьяго и пр. частныхъ произведенiй, опытный разрѣшатель

можетъ не писать; для начинающихъ же нули сіи служатъ вѣрнѣйшимъ средствомъ избѣгать ошибокъ.

Не худо разрѣшить слѣдующіе примѣры, изъ коихъ для нѣкоторыхъ показаны одни рѣшенія:

567023007 × 5000 = 2835115035000

900030 × 7002003 =
```
        2700090
     1800060000
  6300210000000
  -------------
  6302012760090
```

1234567 × 7654321 =
```
        1234567
       24691340
      370370100
     4938268000
    61728350000
   740740200000
  8641969000000
  -------------
  9449772114007
```

501092000 × 101000 = 50610292000000

580 × 7020703 = 4072007740.

В. Послѣдній примѣръ заставляетъ спросить, не лучше ли помножить 7020703 на 580?

От. Гораздо удобнѣе: но должно предварительно увѣриться, точно ли произведеніе не перемѣнится, когда множимое сдѣлается множителемъ, а множитель множимымъ? Для сего поступимъ такимъ образомъ: ежели надобно 5×3, то должно 5 единицъ повторить 3 раза, т. е. написать

$$
\begin{array}{c}
1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{array}
$$

и потомъ сложить; выйдетъ $3 + 3 + 3 + 3 + 3$, т. е. 3×5. И такъ $5 \times 3 = 3 \times 5$. Хотя сіе разсужденіе произведено надъ частнымъ примѣромъ, однако относится ко всѣмъ числамъ.

В. Не можно ли еще сдѣлать какое нибудь замѣчаніе?

От. Одно только: если множимое и множитель, или. говоря вообще, *производители* весьма многосложны; то во множителѣ нѣкоторыя цыфры должны повторяться, и потому для составленія полнаго произведенія дол-

жно сперва составить частныя произведенія чрезъ умноженіе множимаго на разныя цыфры множителя ;потомъ брать сіи произведенія, назначать ихъ порядокъ и складывать. На примѣръ въ 563 × 82039173 2 разныхъ частныхъ произведеній выйдетъ токмо шесть:

отъ 1...563, 2... 1126, 3..1689, 7..3941, 8.. 4504, и отъ 9...5067, изъ коихъ составляю

$$
\begin{array}{r}
1126 \\
16890 \\
394100 \\
563000 \\
50670000 \\
168900000 \\
1126000000 \\
45040000000 \\
\hline
46188054516
\end{array}
$$

3. *О вычитаніи.*

В. Еслибы даны были сумма и одно слагаемое, то какимъ образомъ найти другое слагаемое?

От. Очень легко: надобно только къ единицамъ, десяткамъ, сотнямъ, тысячамъ и т. д. даннаго слагаемаго присчитать столько единицъ, десятковъ, сотенъ, тысячь, и пр., чтобъ въ суммѣ вышли единицы, десятки, сотни, тысячи, и пр. данной суммы. На примѣръ: если сумма будетъ 567, слагаемое 243; то вижу, что къ 3 единицамъ должно придать 4, къ 4 десяткамъ — 2, къ 2 сотнямъ 3, чтобъ составить 7 ед. 6 десят. и 5 сотенъ данной суммы. Посему искомое слагаемое будетъ 324.

В. И такъ заданный вопросъ разрѣшается также посредствомъ сложенія?

От. По необходимости: ибо онъ обратный тому, въ которомъ по двумъ слагаемымъ требовалось бы найти сумму. Впрочемъ, поелику при рѣшеніи подобныхъ вопросовъ встрѣчаются нѣкоторыя особенности, то изъ нихъ составляютъ от-

дѣльное дѣйствіе, называемое *вычитаніемъ.*

В. Кажется, сіе названіе несвойственно?

От. Не совсѣмъ: въ разрѣшенномъ примѣрѣ число 324 показываетъ, чѣмъ 567 болѣе 243; слѣд. ежели изъ 567 дѣйствительно отнимемъ или изключимъ или сдѣлаемъ *вычитаніе* 243, то получимъ 324. По сей причинѣ искомое слагаемое называется и *разностью* и *остаткомъ*, данная сумма — *уменьшаемымъ*, данное слагаемое — *вычитаемымъ.*

В. И такъ вычитаніе можно производить двояко: или присчитывать къ вычитаемому столько, чтобъ вышло уменьшаемое, или изключать вычитаемое изъ уменьшаемаго. Который же изъ сихъ способовъ должно предпочитать?

От. Безъ сомнѣнія первый: ибо чрезъ него вычитаніе тѣсно соединяется со сложеніемъ; однообразіе

же способовъ доставляетъ чрезвычайныя выгоды для вычисленій и вообще для всей *Математики.*

В. Судя по предложеннымъ замѣчаніямъ и по разрѣшенному примѣру, должно заключить, что производство вычитанія весьма нетрудно?

От. Встрѣчается токмо одно затрудненіе, когда нѣкоторыя цыфры уменьшаемаго меньше соотвѣтствующихъ цыфръ вычитаемаго. Сіе затрудненіе уничтожается помощію слѣдующихъ замѣчаній:

1. Сумма болѣе каждаго изъ своихъ слагаемыхъ.

2. Ежели складываются только два числа, то въ суммахъ каждаго порядка единицъ не можетъ выходить болѣе 18, ибо старшая цифра есть 9.

Наконецъ 3, припомнимъ, что десятки, выходящіе при сложеніи въ суммахъ каждаго порядка единицъ, относятся къ слѣдующему порядку.

Теперь возьмемъ примѣръ: вычесть 790863 изъ 875315? Сіе требованіе изображаютъ знакомъ (—), поставляемымъ между уменьшаемымъ и вычитаемымъ; именно: . . . .
875315 — 790863. И такъ должно придать 2, чтобъ составить 5 ед. уменьшаемаго. Потомъ вижу, что слагаемое есть 6 десятковъ; и какъ въ суммѣ не можетъ выйти 1 дес. по первому, и болѣе 11 по второму изъ предложенныхъ замѣчаній; то заключаю, что при составленіи суммы 875315 десятокъ десятковъ отнесенъ былъ къ сотнямъ. Но также изъ 8 сотенъ не можетъ составиться 2, а 12, слѣд. опять 10 сотенъ отнесены были къ тысячамъ Наконецъ изъ 9 десят. тысячь должно составиться не 7, но 17 десят. тысячь, изъ коихъ 10 десятковъ тысячь отнесены къ сотнямъ тысячь. И такъ уменьшаемое, какъ сумма вычитаемаго съ разностью, содержитъ

7 сотенъ тысячъ,
17 десят. тысячь,
4 тысячи,
12 сотенъ,
11 десятковъ;
и 5 единицъ;
а поелику вычитаемое состоитъ изъ
7 сот. тысячь
9 десятк. тысячь;
0 тысячь,
8 сотенъ,
6 десятковъ,
и 3 единицъ;
то въ разности выйдетъ
8 десят. тысячь,
4 тысячи,
4 сотни,
5 десятковъ,
и 2 единицы;
т. е. 875315 — 790863 = 84452.
Такимъ же образомъ найдется 9080203—7205600 = 1874603; ибо уменьшаемое, какъ сумма вычитаемаго и разности, должно содержать 3 един., 0 десят., 12 сотенъ, 9

тысячь, 7 десятк. тысячь, 10 сотенъ тысячь и 8 милліоновъ.

В. Теперь понятно, что значитъ занимать по одной единицѣ отъ каждаго высшаго порядка; и когда надобно вычитать изъ цыфры съ нулями, тогда цыфра сія уменьшается 1, всѣ средніе нули превращаются въ 9, а послѣдній въ 10?

От. Точно такъ, на примѣръ 90000 — 82309 = 7691; ибо 90000 должно превратить въ 8 десят. тысячь, 9 тысячь, 9 сотенъ, 9 десятковъ и 10 единицъ. Также . . . . 100000 — 6 = 99994.

В. Нѣтъ ли еще какихъ нибудь особенностей при вычитаніи?

От. Собственно для вычитанія предложены всѣ правила. Но если потребуется сложить и вычесть многія числа; то для удобности вычитаніе превращается въ сложеніе?

В. Какимъ образомъ?

От Поелику, на примѣръ, 15—6=5+10—6=5+4=9; слѣд.

получится настоящая разность, когда вмѣсто вычитанія 6 придадимъ 4 къ 15 и потомъ исключимъ 10. Еще: $863-7=853+10-7=853+3=856$; и здѣсь также вмѣсто вычитанія 7 придается 3, а потомъ исключаются 10. Сей способъ рѣшенія изображаютъ такъ:

$$15-6=15+\bar{1}4=9;$$
$$863-7=863+\bar{1}3=856.$$

Подобно сему получимъ

$$9635-3763=9635+\bar{1}6237=5872;$$
$$395094-123045=395094+\bar{1}876955=272049.$$

Во всѣхъ сихъ случаяхъ разность между вычитаемымъ и единицею высшаго порядка противъ него называется *Ариѳметическимъ дополненіемъ*; 4 и 3 суть Ариѳметическія дополненія 6 и 7; 6237 Ариѳ. дополненіе 3763, и пр.

Теперь надобно показать, гдѣ полезно употребленіе Ариѳметиче-

скихъ дополненій. Требуется вычислить 569—342+72—723+963—52; сіе выраженіе посредствомъ Ариѳ. дополненій превращается въ такое:

$$
\begin{array}{r}
569 \\
\bar{1}658 \\
72 \\
\bar{1}277 \\
963 \\
\bar{1}48 \\
\hline
487
\end{array}
$$

Такимъ образомъ всѣ вычитаемыя числа замѣнены слагаемыми, что способствуетъ къ скорѣйшему рѣшенію подобныхъ вопросовъ.

4. *О дѣленіи.*

В. Ежели сложенію вообще противополагается вычитаніе; то и частный случай сложенія — умноженіе должно имѣть противное дѣйствіе?

От. Имѣетъ; дѣйствіе сіе называютъ *дѣленіемъ,* и посредствомъ

его разрѣшаются тѣ вопросы, въ которыхъ по данному произведенію и одному производителю требуется опредѣлить другой производитель.

В. И здѣсь, какъ при вычитаніи, можно усомниться въ точности названія: ибо слово *дѣлить* означаетъ разлагать на части?

От. Правда: но находить производитель значитъ собственно узнавать, сколько разъ содержится данный производитель въ данномъ произведеніи, или на сколько частей разлагается произведеніе, изъ коихъ каждая равняется данному производителю. И такъ *дѣленіемъ* можно называть упомянутое дѣйствіе.

В. Почему же не говорятъ, что дѣлить числа значитъ находить, сколько разъ одно изъ нихъ содержится въ другомъ, или на сколько частей опредѣленной величины можетъ разложиться одно изъ данныхъ чиселъ?

От. Потому что дѣленіе должно относиться ко всѣмъ числамъ; и какъ многія числа не могутъ быть дѣлимы ровно на нѣсколько частей, то въ сихъ случаяхъ дѣленіе подлежало бы изключеніямъ, и слѣд. не было бы противно умноженію, которое есть дѣйствіе общее, не имѣющее никакихъ изключеній.

В. Какимъ образомъ производится дѣленіе?

От. Вопервыхъ замѣтимъ, что данное произведеніе называется *дѣлимымъ*, данный производитель — *дѣлителемъ*, а искомый — *частнымъ*; самое же требованіе означается посредствомъ (:), поставляемыхъ между дѣлимымъ и дѣлителемъ. Потомъ ежели 2563 должно раздѣлить на 7, то надобно найти число, которое будучи повторено 7 разъ, давало бы 2563: тотчасъ вижу, что сей искомый производитель менѣе 1000, да и сотенъ не можетъ онъ содержать болѣе трехъ: ибо $400 \times 7 = 2800$;

посему помножаю 300 на 7, получаю 2100. Вычтя 2100 изъ 2563, нахожу, что должно еще составить 463; но какъ $60 \times 7 = 420$, то заключаю, что въ частномъ должно быть 6 десятковъ. Вычитаю опять 420 изъ 463, получаю въ остаткѣ 43, по которому сужу, что точнаго частнаго въ цѣлыхъ числахъ найти не можно, послику $7 \times 6 = 42$, а $7 \times 7 = 49$. И такъ искомое частное содержится между 366 и 367. Все сіе изображаютъ такъ:

$$
\begin{array}{rr}
2563 : 7 = & 300 \\
\underline{2100} & 60 \\
463 & \underline{6} \\
\underline{420} & 366 \\
43 & \\
\underline{42} & \\
1 &
\end{array}
$$

B. Посему, чтобъ удовлетворить вопросу совершенно, должно еще найти дробь, которая, будучи помножена на 7, давалабы 1?

От. Такъ точно; но не зная свойства дробей, не можемъ еще выполнить сего требованія. Притомъ сей примѣръ и подобные ему объясняютъ, почему подъ дѣленіемъ нельзя разумѣть дѣйствія, посредствомъ котораго находятъ, сколько разъ одно число содержится въ другомъ.

В. Ежели дѣлимое и дѣлитель суть числа многосложныя, то неужели дѣленіе производится также незатруднительно, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ?

От. Почти также: надобно только при началѣ дѣйствія опредѣлить число цыфръ ча тнаго, основываясь на томъ свойствѣ дѣлимаго, какъ произведенія, что въ немъ содержится столько нулей, сколько находится оныхъ въ обоихъ производителяхъ; для сего всѣ цыфры дѣлимаго и дѣлителя, кромѣ первыхъ съ лѣвой руки, принимаются за нули. Такъ для раздѣленія

63020127600090 на 7002003 полагаю, что дѣлимое, какъ произведеніе, содержитъ 12 нулей, а дѣлитель 6; слѣд. въ частномъ должно находиться также 6 нулей, т. е. сіе частное не можетъ имѣть болѣе 7 цыфръ. Но какъ 7002003 × 1000000 дастъ болѣе дѣлимаго, то въ частномъ нѣтъ и милліоновъ; посему надобно приискать надлежащее число сотенъ тысячь, начиная пробы со старшихъ цыфръ: тотчасъ нахожу 900000 и продолжаю дѣйствіе по вышеизъясненному, принимая каждый остатокъ за новое дѣлимое:

63020127600090	: 7002003 =	900000
63018027000000		30
2100600090		900030
2100600090		

Здѣсь дѣйствіе оканчивается на второмъ остаткѣ, но въ слѣдующемъ примѣрѣ понадобится нѣсколько пріемовъ:

461880545116 : 563 =	800000000
450400000000	20000000
11480545116	300000
11260000000	90000
220545116	1000
168900000	700
	30
51645116	2
50670000	820391732
975116	
563000	
412116	
394100	
18016	
16890	
1126	
1126	

Какъ въ умноженіи, такъ и въ дѣленіи опытный Ариѳметистъ можетъ опускать нули, къ каждому остатку сносить по одной цыфрѣ дѣлимаго и ставить нуль въ частномъ, какъ скоро остатокъ вмѣстѣ со снесенною цыфрою окажется менѣе дѣлителя; но для начинающихъ предложенная форма дѣленія необходима.

Впрочемъ разрѣшимъ примѣръ и по общеупотребительному способу

```
111111111 : 1234 = 900414
1110б
 5111
 4936
  1751
  1234
   5171
   4936
    235
```

Въ семъ способѣ рѣшенія при началѣ дѣйствія должно въ дѣлимомъ отсчитать столько цыфръ отъ лѣвой руки, чтобъ составилось число, въ которомъ дѣлитель могъ бы содержаться нѣсколько разъ: въ нашемъ примѣрѣ отсчитываемъ 5 цыфръ. *Задавшись* 9-ю, находимъ остатокъ, который съ двумя цыфрами дѣлимаго еще меньше дѣлителя, почему въ частномъ пишемъ два нуля, и уже снесши третью цыфру, усматриваемъ, что можно дѣлитель повторить 4 раза. Послѣ сего окончить дѣйствіе уже не трудно.

В. Изъ всего сказаннаго должно заключить, что уразумѣвшій производство умноженія не встрѣтитъ никакой трудности въ дѣленіи: но въ случаѣ весьма многосложныхъ чиселъ не льзя ли чѣмъ нибудь облегчить дѣйствіе?

От. Можно, и притомъ почти тѣмъ же, чѣмъ облегчается умноженіе, т. е. надобно предварительно составлять изъ дѣлителя девять произведеній, помножая его на девять первыхъ чиселъ. Вотъ примѣръ:

56098034567389 56124 : 5802347 =
52221123   966816265338

38769115
34814082

39550336
34814082

47362547
46418776

9437713
5802347

36353668
34814082

1. . .	5802347
2. . .	11604694
3. . .	17407041
4. . .	23209388
5. . .	29011735
6. . .	34814082
7. . .	40616429
8. . .	46418776
9. . .	52221123

```
15395869
11604694
--------
 37911755
 34814082
 --------
  30976736
  29011735
  --------
   19650011
   17407041
   --------
    22429702
    17407041
    --------
     50226614
     46418776
     --------
      3806838
```

Вспомогательную таблицу должно составлять чрезъ сложеніе: на пр. пятое произведеніе есть сумма втораго и третьяго; седьмое — третьяго и четвертаго, и пр.

УРОКЪ III.

О дѣлителяхъ.

В. Изъ предыдущихъ примѣровъ дѣленія видимъ, что нѣкоторыя числа могутъ дѣлиться на другія безъ остатка, или *нацѣло*: какимъ же образомъ находить всѣ цѣльные дѣлители даннаго числа?

От. Вопросъ сей весьма обширенъ, и потому должно раздѣлить его на части. Прежде всего замѣтимъ, что числа называются *первоначальными* или *простыми*, когда они могутъ дѣлиться безъ остатка токмо на единицу и на самихъ себя, и *составными*, когда они дѣлятся на другія числа, кромѣ единицы и самихъ себя. Такъ 2, 3, 5, 7, 11, 19, и пр, суть числа простыя; 4, 6, 8, 9, 21, и пр. суть числа составныя.

В. Взявши число 36, вижу, что оно можетъ дѣлиться нацѣло на 2,

4, 3, 9, 18, . . . ; слѣд. и цѣльные дѣлители могутъ быть простыя и составныя числа?

От. Точно такъ; посему чтобъ найти всѣ цѣльные дѣлители даннаго числа, должно сперва опредѣлить тѣ изъ нихъ, которые суть числа первоначальныя. Для сего раздѣляютъ данное число на числа первоначальныя по ихъ естественному порядку, т. е. сперва на 2, потомъ на 3, на 5 и т. д. пока выйдетъ въ частномъ число первоначальное: тутъ дѣйствіе оканчивается. На примѣръ: раздѣливши 360 на 2, получаю точное частное 180; слѣд. 360=2×180; раздѣливши 180 опять на 2, нахожу въ частномъ 90; слѣд. 180=2×90 и 360 = 2×2×90; и какъ 90 можно еще раздѣлить на 2 и выйдетъ въ частномъ 45, то 90 = 2×45 и 360 = 2 × 2 × 2 × 45. Теперь поелику 45 на 2 безъ остатка недѣлится, то пробую дѣлить на второе первоначальное число 3; въ частномъ выхо-

дитъ точно 15; слѣд. $45 = 3 \times 15$ и $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$. Остается разложить 15 на первоначальныя производители 3 и 5; такъ что получаю наконецъ $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Все сіе дѣлопроизводство располагаютъ въ такомъ видѣ:

Дан. число	*Дѣлители*
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

(*Частныя.*)

Вотъ еще примѣръ:

Дан. числ.	*Дѣлители*
13650	2
6825	3
2275	5
455	5
91	7
13	13
1	

(*Частныя.*)

В. Не встрѣчаются ли при семъ затрудненія?

От. Иногда частное или данное простое число по величинѣ своей кажется составнымъ: тогда надобно сдѣлать многія пробы для увѣренія, что оно принадлежитъ къ первоначальнымъ. Чтобъ сократить сіи пробы, должно продолжать ихъ токмо до тѣхъ поръ, пока испытаемъ такой простой дѣлитель, который будучи помноженъ самъ на себя, дастъ произведеніе, бóльшее разлагаемаго числа.

В. На чемъ основывается сіе правило?

От. Въ слѣдующемъ примѣрѣ увидимъ причину: возмемъ число 347, пробуемъ дѣлить его на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19; отъ послѣдняго дѣленія находимъ въ частномъ числѣ 18 и въ остаткѣ 5; слѣд. еслибы 347 могло дѣлиться на простое число, бóльшее 19, на пр. на 23, 29, и пр., то второй производитель былъ бы

менѣе 19; но сіи производители были уже испытываемы. И такъ 347 есть число первоначальное.

В. Но для полноты сего объясненія надобно доказать, что когда увеличивается дѣлитель, тогда уменьшается частное?

От. Положимъ, что 48 есть дѣлимое, 6 дѣлитель, 8 частное; слѣд. $48 = 6 \times 8$; но какъ $8 = 2 \times 4$, то $48 = 6 \times 2 \times 4 = 12 \times 4$. Изъ сего видно, что когда дѣлитель увеличился вдвое, тогда частное во столько же разъ уменьшилось.

В. Нашедши простые цѣльные дѣлители даннаго числа, какимъ образомъ находятся всѣ прочіе его дѣлители?

От. Если данное число будетъ 360, то составляемъ сперва сложные дѣлители изъ каждаго разряда простыхъ, именно:

1, 2, 4, 8
1, 3, 9
1, 5.

Потомъ первый порядокъ помножаемъ на каждое число втораго; выйдутъ дѣлители

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, которые должно еще помножить на 1 и 5; получимъ:

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Таковы суть числа, изъ коихъ каждое дѣлитъ 360 безъ остатка.

Если же данное число будетъ 675, то всѣ его цѣлыые дѣлители найдутся, когда перемножатся 1, 3, 9, 27 на 1, 5 и 25; потому что $675 = 1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$. Получимъ 1, 3, 9, 27, 5, 15, 45, 135, 25, 75, 225, 675.

В. Слѣдующій вопросъ представляется самъ собою: *найти наибольшій общій дѣлитель двухъ чисель?*

От. Ежели даны будутъ числа 360 и 675; то разсматривая всѣ дѣлители того и другаго числа, на-

ходимъ, что изъ нихъ общіе суть: 3, 5, 9, 15, 45; слѣд 45 есть искомый наибольшій общій дѣлитель данныхъ чиселъ. Но $45 = 3 \times 3 \times 5$, т. е. 45 составляется изъ перемноженія всѣхъ простыхъ общихъ дѣлителей. И такъ, *чтобъ для двухъ чиселъ составить наибольшій общій дѣлитель, должно разложить сіи числа на простые производители и перемножить между собою тѣ изъ нихъ, которые входятъ въ составъ того и другаго числа.* Разрѣшимъ еще примѣръ: беремъ числа 13650 и 1540; выше видѣли, что $13650 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13$, и разложивши 1540, находимъ $1540 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$; слѣд. общіе дѣлители будутъ 2, 5, 7, изъ коихъ составляемъ уже наибольшій общій дѣлитель 70.

B. Столь простой и естественный способъ находить наибольшій общій дѣлитель сопровождается вышеупомянутымъ затрудненіемъ при

разложенiи чиселъ на простые производители: не можно ли разрѣшать сей вопросъ другимъ образомъ?

От. Можно; однако прежде нежели предложимъ другой способъ находить наибольшiй общiй дѣлитель, замѣтимъ, что изъясненный должно употреблять предпочтительно. Ибо единственное затрудненiе при разложенiи чиселъ на простые производители устраняется возможностью уменьшать число испытуемыхъ дѣлителей и привычкою къ вычисленiямъ. Сверхъ того сiе затрудненiе вознаграждается очевидностью способа. Послѣ сего другой способъ не надлежало бы и предлагать; но какъ онъ весьма остроуменъ и нуженъ для вычисленiй Алгебраическихъ, то для упражненiя разсудка начинающихъ и для приготовленiя ихъ мало помалу къ Алгебрѣ не можемъ умолчать объ ономъ. Предварительно изъяснимъ, что *если число дѣлится на другое безъ остатка, то и всѣ его* кратныя *бу-*

дутъ также дѣлиться на сіе второе число. На пр. $8:4=2$; если потребуется 40 или 8×5, раздѣлить на 4, то также получимъ точное частное, потому что $40:4=(8+8+8+8+8):4=2+2+2+2+2=$ цѣлому числу.

В. Остановимся на етомъ вычисленіи: ежели $40:4=8\times5:4=2+2+2+2+2=2\times5$, то не должно ли заключить, что *для раздѣленія произведенія двухъ чиселъ, должно раздѣлить только одинъ производитель?*

От. Заключеніе справедливо; отсюда еще такое замѣчаніе: *ежели ни одинъ производитель не дѣлится на какое нибудь число, то и произведеніе ихъ на сіе число безъ остатка не раздѣлится.* Теперь приступимъ къ нахожденію общаго большаго дѣлителя, и возьмемъ прежнія числа 13650 и 1540. Прежде всего замѣтимъ, что искомый дѣлитель не можетъ быть болѣе

1540; ибо раздѣляя меньшое число на большое, не льзя получить въ частномъ цѣлаго числа; но какъ само 1540 можетъ быть дѣлителемъ обоихъ данныхъ чиселъ, то и должно испытать дѣленіе 13650 на 1540; въ частномъ выходитъ 8, въ остаткѣ 1330, т. е. 13650 = 1540×8 + 1330 Хотя чрезъ сіе дѣленіе недостигли желаемаго, однако можемъ и имъ воспользоваться: если бы знали число, на которое раздѣлились бы безъ остатка 1540 и 1330, то по первому изъ предложенныхъ замѣчаній заключили бы, что на сіе число раздѣлится и произведеніе 1540×8; слѣд. тогда вся сумма 1540×8+1330 или 13650 на сіе число раздѣлилось бы безъ остатка; т. е. общій дѣлитель для 1540 и 1330 (дѣлителя и остатка) былъ бы общимъ дѣлителемъ и для 13650 (дѣлимаго). И такъ опять имѣемъ причину дѣлить 1540 на 1330; въ частномъ находимъ 1, въ остаткѣ 210. Повто-

ривъ предыдущее разсужденіе, найдемъ необходимымъ дѣлить 1330 на 210; но какъ и здѣсь получается остатокъ 70, то должно еще раздѣлить 210 на 70: дѣленіе производится безъ остатка. Изъ всего получаемъ

$$1365о = 1540 \times 8 + 1330;$$
$$1540 = 1330 \times 1 + 210.$$
$$1330 = 210 \times 6 + 70,$$
$$210 = 70 \times 3.$$

По послѣднему выраженію заключаемъ, что 210 дѣлится на 70 безъ остатка; но какъ 70 и 210 × 6 на 70 раздѣлятся такимъ же образомъ, то 70 будетъ дѣлителемъ и для 1330. Отсюда переходимъ ко второму выраженію, въ которомъ 1330 и 210 дѣлятся на 70, слѣд. должно дѣлится 1540; а когда 1330 и 1540 дѣлятся на 70, тогда тоже можно сдѣлать съ 1540 × 8 и съ 13650. И такъ 70 есть общій большой дѣлитель 13650 и 1540.

В. Что 70 есть общій дѣлитель взятыхъ чиселъ, это очевидно; но почему должно считать его *наибольшимъ*?

От. Для удовлетворенія сего вопроса, примемъ, что дѣйствительно есть общій дѣлитель для 13650 и 1540, который больше 70: въ семъ случаѣ по первому выраженію должны заключить, что на предположенное число раздѣлится 1330, по второму 210, по третьему 70; слѣд. большое число раздѣлилось бы на меньшое безъ остатка, что невозможно.

В. Въ какомъ порядкѣ располагаются упомянутыя дѣленія при нахожденіи наибольшаго общаго дѣлителя?

От. Слѣдующимъ образомъ:

13650	1540	1330	210	70
	8	1	6	3

Вотъ еще примѣры:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\underline{2961} & \underline{799} & \underline{564} & \underline{235} & \underline{94} & \underline{47} \\
 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2
\end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\underline{561} & \underline{32} & \underline{17} & \underline{15} & \underline{2} & \underline{1} \\
 & 17 & 1 & 1 & 7 & 2
\end{array}.$$

Въ первомъ примѣрѣ искомый дѣлитель есть 47, во второмъ 1, т. е. числа 561 и 32 общаго дѣлителя не имѣютъ.

В. Какое правило должно вывести изъ всего сказаннаго?

От. Чтобъ найти наибольшій общій цѣльный дѣлитель двухъ чиселъ, должно большое изъ нихъ раздѣлить на меньшое, на остатокъ меньшое число, на каждый новый остатокъ предыдущій остатокъ и продолжать сіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ выйдетъ нуль: тогда дѣлитель послѣдняго дѣленія будетъ искомый.

В. Можно ли распространить изысканія о дѣлителяхъ?

От. Вразсужденіи дѣлителей числа имѣютъ важныя и любопытныя свойства: но для открытія сихъ свойствъ Ариѳметическія средства весьма недостаточны, и потому обратимся къ сей Теоріи въ Алгебрѣ.

УРОКЪ IV.

О дробяхъ.

В. Изъяснивши главныя Ариеметическія дѣйствія съ числами цѣлыми, должно показать какимъ образомъ производятся оныя съ дробями; но прежде повторимъ вопросъ: что разумѣютъ подъ словомъ *дробь?*

От. Дробью называютъ число, показывающее собраніе равныхъ долей единицы; и для точнаго понятія величины дроби надобно знать число долей и ихъ величину, т. е. на сколько равныхъ частей раздѣлена единица: ежели единица раздѣлится сперва на 7 частей, а потомъ на 21; то каждая часть изъ первыхъ втрое болѣе каждой части изъ вторыхъ; слѣд. взявши тѣхъ и другихъ долей по 5, составимъ двѣ дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{5}{21}$, изъ коихъ первая втрое болѣе второй.

В. Цѣлыя числа, посредствомъ которыхъ изображаются дроби, не имѣютъ ли особенныхъ названій?

От. Имѣютъ: то изъ оныхъ двухъ чиселъ, которое означаетъ число частей, называется *числителемъ*; а другое, означающее величину частей, — *знаменателемъ*.

В. Въ какихъ случаяхъ дробь бываетъ равна, болѣе и менѣе единицы?

От. Положимъ, что единица раздѣлена на 25 равныхъ частей; слѣд. тогда въ единицѣ содержится 25 частей, и потому дробь $\frac{25}{25}$ равняется 1. Но если возьмемъ сихъ частей 7, 8, 15, вообще менѣе 25, то получимъ дроби $\frac{7}{25}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{15}{25}$. . . ., мéньшія 1; наконецъ, когда 25ая доля повторится 30, 40, . . вообще болѣе 25 разъ, то составятся дроби $\frac{30}{25}$, $\frac{40}{25}$. ., изъ коихъ каждая больше единицы.

В. Нѣтъ ли постоянныхъ правилъ для дѣленія единицы на части?

От. Нѣтъ; она можетъ дѣлиться произвольно. Но когда положится

постоянный законъ для дѣленія единицы; тогда изображеніе дробей и вычисленія съ ними сократятся значительно. Примемъ, что единица дѣлится постоянно на десять частей, каждая изъ нихъ опять на десять, и т. д.; чрезъ сіе будутъ выходить десятыя, сотыя, тысячныя и т. д. доли, изъ коихъ первыя въ десять разъ больше вторыхъ, вторыя въ десять разъ больше третьихъ и т. д. Дроби, составленныя изъ таковыхъ долей, называются *десятичными.*

В. Чѣмъ же сокращается ихъ изображеніе?

От. Тѣмъ, что не имѣемъ надобности писать знаменателей: ибо знаемъ, что въ ряду цыфръ значеніе каждой изъ нихъ уменьшается въ десять разъ съ приближеніемъ къ правой рукѣ; слѣд. первая цыфра, поставленная по правую руку единицъ, должна означать число десятыхъ долей, вторая — число сотыхъ, третья — число тысячныхъ, и пр. Притомъ единицы

отдѣляются отъ долей запятою. Такимъ образомъ число 52,346 изображаетъ 52 единицы и 3 десятыхъ, 4 сотыхъ, 6 тысячныхъ долей; въ числѣ же 0,0507 видимъ 5 сотыхъ и 7 десятитысячныхъ долей.

В. Сіи примѣры показываютъ, что дѣйствительно изображеніе сокращается, но кажется *чтеніе* дѣлается затруднительнѣе?

От. Можно и его сократить: поелику десятыя доли въ десять разъ болѣе сотыхъ, сотыя въ десять разъ болѣе тысячныхъ; слѣд. десятыя доли во сто разъ болѣе тысячныхъ, и потому вмѣсто 3 десятыхъ и 4 сотыхъ можно взять 300 и 40 тысячныхъ; такъ что въ первомъ примѣрѣ число выражаетъ 52 единицы и 346 тысячныхъ долей. Также сотая доля во 100 разъ болѣе десятитысячной, и во второмъ примѣрѣ вмѣсто 5 сотыхъ и 7 десятитысячныхъ можемъ читать 507 десятитысячныхъ долей. Вообще *всякая десятичная дробь*

имѣетъ знаменателемъ единицу и при ней столько нулей, сколько въ дроби цыфръ по правую сторону запятой. Такъ 0,07 есть дробь, коей числитель 7, а знаменатель 100, т. е. $0{,}07 = \frac{7}{100}$; $2{,}3045 = 2\frac{3045}{10000}$; $0{,}00567 = \frac{567}{100000}$; и пр.

В. Выучившись изображать дроби, надобно объяснить главныя ихъ свойства: *почему дробь, помноженная на свой знаменатель, даетъ въ произведеніи числитель?*

От. Доказать сіе весьма нетрудно: ежели имѣемъ $\frac{5}{7}$, то видимъ, что 1 седьмая доля, повторенная 7 разъ, составитъ единицу; другая такая-же доля дастъ также единицу; и пр. слѣд. 5 таковыхъ долей, повторенныя 7 разъ, должны составить 5 единицъ. По тому же расчету найдемъ, что $0{,}5 \times 10 = 5$, $0{,}027 \times 1000 = 27$, и пр.; ибо въ первомъ случаѣ каждую десятую долю надобно повторить 10 разъ, чтобъ получить единицу, а во второмъ

единица составится отъ повторенія каждой доли 1000 разъ.

В. Въ какомъ случаѣ можемъ пользоваться симъ свойствомъ дробей?

От. Для нахожденія полнаго частнаго, когда оно не можетъ быть цѣлымъ числомъ, или когда оно заключается между двумя цѣлыми числами, разнящимися единицею. На пр раздѣляя 111111111 на 1234, нашли, что частное содержится между 900414 и 900415; или чтобъ кончить дѣленіе, должно сыскать число, которое, будучи помножено на 1234, дало бы 235: явно, что сіе число должно быть дробь, меньшая единицы; но по объясненному свойству дробей тотчасъ видимъ, что числитель сей дроби будетъ 235, а знаменатель 1234; слѣд. для полнаго частнаго получимъ $900414\frac{235}{1234}$. Еще: если потребуется раздѣлить 15 на 17, то въ частномъ должно найти также дробь, которая даетъ

15, когда помножится на 17; слѣд. сія дробь будетъ $\frac{15}{17}$.

В. Можно ли вывести изъ сихъ примѣровъ такое заключеніе: *при дѣленіи меньшаго числа на большое въ частномъ получается дробь, коей числитель есть дѣлимое, а знаменатель — дѣлитель?*

От. Можно; и по сей причинѣ весьма часто оставляютъ частное невычисленнымъ въ видѣ дроби.

В. Ежели дробь болѣе единицы, то какимъ образомъ находится число единицъ и долей, содержащихся въ сей дроби?

От. Вопросъ сей разрѣшается весьма легко; стоитъ токмо опредѣлить, сколько разъ знаменатель содержится въ числителѣ. Ежели дана будетъ дробь $\frac{143}{64}$, то разсчитываю, что въ одной единицѣ заключаются 64 доли, въ другой также 64: слѣд. двѣ единицы содержатъ 128; а какъ въ семъ числѣ недостаетъ 15 долей до 143, то и выходитъ,

что $\frac{143}{64} = 2$ и $\frac{15}{64}$, или просто $2\frac{15}{64}$. Сей способъ основывается на первоначальномъ понятіи о дроби; но принявши ее за частное, должно прямо числитель раздѣлить на знаменатель. И такъ, чтобъ *исключить изъ дроби цѣлыя единицы, должно числитель раздѣлить на знаменатель.*

В. Какъ объяснить обратный вопросъ, т. е. какъ соединяется цѣлое число съ дробью?

От. Онъ разрѣшается посредствомъ подобнаго же разсчета: положимъ, что требуется соединить 5 съ $\frac{3}{11}$: поелику 5 должно прежде превратить въ одиннадцатыя доли, то замѣчаю, что каждая единица содержитъ такихъ долей 11, и слѣд. 5 единицъ равняются $\frac{55}{11}$; придавши еще 3 данныя доли, получаю уже $\frac{58}{11}$. Также $7,03 = \frac{703}{100}$; ибо въ каждой единицѣ содержится 100 долей, въ 7 единицахъ — 700; приложивши 3 данныя доли, найдемъ всего 703 со-

тыхъ или $\frac{703}{100}$. По той же причинѣ $5,337 = \frac{5337}{1000}$, $5,0002 = \frac{50002}{10000}$. Вообще, *чтобъ цѣлое число и десятичную дробь соединить въ одну дробь, должно уничтожить запятую, и подписать знаменателемъ единицу и при ней столько нулей, сколько цыфръ по правую руку запятой.*

В. Въ какихъ случаяхъ дробь увеличивается?

От. Поелику числитель означаетъ число частей, слѣд. когда величина частей или знаменатель не перемѣняется, а числитель увеличивается; тогда увеличивается и значенiе дроби или, просто, дробь. Не нужно объяснять, что 7 двѣнадцатыхъ долей менѣе 10 такихъ долей, т. е. $\frac{7}{12}$ менѣе $\frac{10}{12}$. Но если число долей остается непремѣннымъ, увеличиваются же самыя доли, то также дробь увеличивается: 6 ыя доли крупнѣе 12 хъ, и потому 5 до-

лей шестыхъ болѣе 5 двѣнадцатыхъ или $\frac{5}{6}$ болѣе $\frac{5}{12}$, 0,5 болѣе 0,05, и пр.

В. А въ какихъ случаяхъ дробь уменьшается?

От. Разумѣется въ противныхъ упомянутымъ, т. е. дробь уменьшается, когда уменьшается числитель, и когда увеличивается знаменатель: ибо отъ первой перемѣны уменьшается число частей; отъ второй же самыя части становятся мѣльче.

В. Но можетъ ли дробь не перемѣняться, хотя числитель и знаменатель ея перемѣняются?

От. Можетъ; на примѣръ дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{10}{12}$ равны между собою; потому что шестыя доли вдвое крупнѣе 12хъ, за то первая дробь содержитъ только 5, а вторая 10 долей; также 0,7 и 0,70 суть дроби равныя: ибо каждая десятая доля въ десять разъ болѣе сотой, и потому вмѣсто 7 десятыхъ должно взять 70 сотыхъ. Обратно,

если увеличиваются доли, то надобно во столько же разъ уменьшать число оныхъ: вмѣсто $\frac{9}{15}$ должно взять только $\frac{3}{5}$, и $0{,}45 = \frac{9}{20}$.

В. И такъ одну и ту же дробь можно выражать различными долями единицы?

От. Точно, и сіе свойство дробей позволяетъ *приводить ихъ къ одному знаменателю.*

В. Какимъ образомъ?

От. Послику при семъ вопросѣ величина общаго знаменателя не назначается, то должно выбирать для него по возможности наименьшее число; обыкновенно берутъ наибольшій знаменатель данныхъ дробей и разсматриваютъ, не можно ли его составить изъ всѣхъ прочихъ знаменателей: если не встрѣтится препятствія, то онъ и будетъ искомымъ общимъ; если же изъ котораго нибудь знаменателя наибольшій знаменатель нельзя составить, то

оба сіи знаменатели разлагаются на простые производители: чрезъ сіе откроется, на какое число должно помножить предполагаемый общій знаменатель, чтобъ получить такое число, которое можно будетъ составить изъ всѣхъ данныхъ знаменателей. Для объясненія возьмемъ дроби $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{6}{21}$, $\frac{9}{28}$; испытываемъ, не можно ли 28 сдѣлать общимъ знаменателемъ: видимъ, что изъ 7 и 14 составить 28 возможно, а изъ 21 нельзя. Но какъ $21 = 3 \times 7$, $28 = 2 \times 2 \times 7$, то сличая производители обоихъ чиселъ, находимъ, что въ 28 нѣтъ 3, и потому 28 помножаемъ на 3; произведеніе $84 = 2 \times 2 \times 7 \times 3$ будетъ искомый общій знаменатель: ибо числа 7, 14, 21 и 28 въ немъ содержатся, и притомъ первое 12, второе 6, третье 4, и четвертое 3 раза. Теперь, чтобъ новыя дроби, выраженныя въ 84 доляхъ, равнялись даннымъ, должно разсуждать такимъ образомъ:

Седьмая доля содержитъ 12 долей *восемьдесять — четвертыхъ*; слѣд. 3 *седьмыхъ* будутъ равняться 36 *восемьдесять — четвертымъ*, т. е. $\frac{3}{7} = \frac{36}{84}$.

Четырнадцатая доля въ 6 разъ болѣе 84ой; слѣд. сихъ послѣднихъ долей надобно взять вшестеро болѣе, и потому вмѣсто 5 выйдетъ 30; именно: $\frac{5}{14} = \frac{30}{84}$.

Двадцать — перьвая доля въ четыре раза болѣе 84 ой; слѣд. вмѣсто 6 *двадцать — первыхъ* надобно взять 24 *восемьдесять — четвертыхъ*: $\frac{6}{21} = \frac{24}{84}$.

Наконецъ *двадцать — осьмая доля* втрое болѣе 84 ой; слѣд. вмѣсто 9 *двадцать — осьмыхъ* должно взять 27 *восемьдесять — четвертыхъ*: $\frac{9}{28} = \frac{27}{84}$.

И такъ данныя дроби, не перемѣняя своихъ величинъ, превращаются въ новыя, имѣющія общій знаменатель:

$$\frac{36}{84}, \frac{30}{84}, \frac{24}{84}, \frac{27}{84}.$$

Разрѣшимъ еще примѣръ, въ которомъ требуется привести къ

одному знаменателю дроби: $\frac{5}{12}$, 0,7, $\frac{7}{18}$, 0,08. Здѣсь надобно сравнить 100 съ 12, 10 и 18; для сего разлагаемъ сіи числа на простые производители:

$$100 = 2.\ 2.\ 5.\ 5,$$
$$12 = 2.\ 2.\ 3,$$
$$10 = 2.\ 5,$$
$$18 = 2.\ 3.\ 3.$$

Тотчасъ видимъ, что 100 не можетъ быть общимъ знаменателемъ: ибо сіе число нельзя составить изъ 12 и 18; но какъ во 100 противъ 18 недостаетъ производителей 3 и 3, а противъ 12 только 3; то помножаемъ 100 на 3.3, и 900 = ... 2. 2. 5. 5. 3. 3 будетъ искомый знаменатель. Потомъ разсматривая сей знаменатель, видимъ, что

12 должно по-
множить на 5. 5. 3 или 75,
10 —— —— на 2. 5. 3. 3 или 90,
18 —— —— на 2. 5. 5 или 50,
100 —— —— на 3. 3 или 9.

Изъ сего заключаемъ, что 900ыя доли мѣльче

12 хъ. въ 75 разъ
10 хъ — 90 —
18 хъ — 50 —
100 хъ — 9 —

и потому вмѣсто

$\frac{5}{12}$ надобно взять $\frac{375}{900}$,
0,7 —— —— $\frac{630}{900}$,
$\frac{7}{18}$ —— —— $\frac{350}{900}$,
$\frac{8}{100}$ —— —— $\frac{72}{900}$.

В. Но если всѣ данные знаменатели будутъ числа простыя?

От. Тогда общій знаменатель по необходимости составится чрезъ перемноженіе всѣхъ данныхъ. Такъ для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ общій знаменатель будетъ $30 = 2.3.5$, и самыя дроби по предыдущему разсчету превратятся въ $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{18}{30}$.

В. Еще одинъ вопросъ: ежели данныя дроби будутъ всѣ десятичныя, то приведеніе оныхъ къ одному знаменателю можно ли производить по изъясненному?

От. Не только можно, но еще дѣйствіе весьма сократится. На пр. тотчасъ видимъ, что дроби

0,7; 0,08; 2,345; 0,007

общимъ знаменателемъ будутъ имѣть 1000; и какъ двѣ послѣднія имѣютъ уже одинъ знаменатель, то онѣ неперемѣняются;

вмѣсто же 0,7 должно взять 0,700,
0,08 ——————— 0,080;

ибо 10 я доля во 100, а сотая въ 10 разъ болѣе тысячной.

В. Для чего нужно приводить дроби къ одному знаменателю?

От. Вопервыхъ безъ общаго знаменателя трудно узнавать, равны или неравны данныя дроби, и которая изъ нихъ большая. На пр. приведши дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, къ одному знаменателю тотчасъ видимъ, что наибольшая есть $\frac{2}{3}$, наименьшая $\frac{1}{2}$. Также изъ дробей 0,1; 0,09; 0,089 первая болѣе всѣхъ прочихъ: ибо приведши ихъ въ 1000 доли, получимъ

0,100; 0,090; 0,089.

Вовторыхъ, поелику для сложенія и вычитанія потребны числа однородныя; то нельзя ни складывать, ни вычитать дроби, имѣющія разные знаменатели; когда же онѣ приведутся къ одному, тогда останется токмо сосчитать число ихъ частей, или сложить и вычисть числителей.

Пусть будутъ даны дроби . . . $\frac{2}{3} - \frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{4}{12}$. Сперва найдемъ общій знаменатель 36 и превратимъ всѣ сіи дроби въ 36я доли:

$$\frac{24}{36} - \frac{28}{36} + \frac{30}{36} - \frac{12}{36}.$$

Потомъ вижу, что изъ 24 и 30, или изъ 54 долей должно вычисть 28 и 12 или 40 долей; слѣд. въ остаткѣ получится $\frac{14}{36}$.

В. Но если при дробяхъ случатся цѣлыя числа, то нужно ли соединять ихъ съ дробями?

От. Нѣтъ; надобно складывать и вычитать тѣ и другія особенно. Вотъ примѣры:

$5\frac{3}{7} + 3\frac{7}{21} - 4\frac{5}{14} + 2\frac{8}{21} - 3\frac{9}{42} = 5\frac{18}{42} + 3\frac{14}{42} - 4\frac{15}{42} + 2\frac{16}{42} - 3\frac{9}{42} = 10\frac{48}{42} - 7\frac{24}{42} = 3\frac{24}{42}$.

$0{,}07 + 5{,}023 - 6{,}9 + 5{,}98 - 3967 = 0{,}070 + 5{,}023 - 6{,}900 + 5{,}980 - 3{,}670 = 11{,}073 - 10{,}570 = 0{,}503$.

$6 - 0{,}0098 = 6{,}0000 - 0{,}0098 = 5{,}9902$.

$1 - 0{,}9999 = 1{,}0000 - 0{,}9999 = 0{,}0001$.

$$6 - \frac{7}{12} = \frac{72}{12} - \frac{7}{12} = \frac{65}{12};$$

или

$$6 - \frac{7}{12} = 5\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = 5\frac{5}{12}.$$

$7\frac{1}{2} - 3\frac{2}{3} = 7\frac{3}{6} - 3\frac{4}{6} = 6\frac{9}{6} - 3\frac{4}{6} = 3\frac{5}{6}$.

Во второй, третьей, четвертой, пятой и шестой задачахъ надлежало отъ цѣлыхъ чиселъ брать единицу и превращать ее въ десятыя, двѣнадцатыя и шестыя доли: безъ чего вычитаніе было бы невозможно.

В. Изъяснивши такимъ образомъ сложеніе и вычитаніе дробей, надобно приступить къ умноженію; прежде всего спрашиваемъ: какъ помножается дробь на цѣлое число?

От. Для сего должно повторить ее столько разъ, сколько единицъ во множитель; слѣд. должно помножить одинъ ея числитель: ибо знаменатель показываетъ только величину помножаемыхъ долей. Такъ

$$\frac{5}{7} \times 3 = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{15}{7}$$

$$0,06 \times 4 = 0,06 + 0,06 + 0,06 + 0,06 = 0,24.$$

$$3\frac{7}{9} \times 4 = 12\frac{28}{9} = 15\frac{1}{9}.$$

$$6,3 \times 5 = 31,5;$$

ибо 15 десятыхъ долей составляютъ 1 единицу и 5 десятыхъ.

При семъ должно объяснить особенное свойство десятичныхъ дробей: если потребуется 6,53 помножить на 10, то надобно увеличить сію дробь въ 10 разъ. Но какъ отъ сего единицы превратятся въ десятки, десятыя доли въ единицы, сотыя доли въ десятыя; то для полученія произведенія стоитъ токмо переставить запятую къ правой рукѣ чрезъ одну цыфру; такъ что. . .

6,53×10=65,3. Еслибы надобно было помножить на 100, то запятую должно переставить уже чрезъ двѣ цыфры: 6,53 × 100 = 653, поелику тогда единицы сдѣлаются сотнями, десятыя доли — десятками, сотыя — единицами. По таковымъ же причинамъ

0,00963 × 100 = 0,963,
0,00963 × 1000 = 9,63,
0,00963 × 10000 = 96,3,
0,00963 × 100000 = 963,
0,00963 × 1000000 = 9630,
и пр.

В. Теперь предложимъ обратный вопросъ: помножить цѣлое число на дробь?

От. Для удобнѣйшаго рѣшенія сего вопроса принимаемъ дробь за частное число: но какъ по смыслу дѣленія частное во столько разъ меньше дѣлимаго, во сколько дѣлитель больше единицы; то помножить на дробь значитъ умножить

на такое число, которое противъ числителя во столько разъ меньше, во сколько знаменатель больше единицы: слѣд. когда помножимъ данное число на одинъ числитель, тогда сдѣлаемъ ошибку, т. е. увеличимъ сіе число болѣе, нежели сколько требуется, и притомъ во столько разъ болѣе, во сколько знаменатель дроби болѣе единицы. Изъ сего слѣдуетъ, что найденное произведеніе отъ умноженія на одинъ числитель должно уменьшить во столько разъ, во сколько знаменатель болѣе единицы, или раздѣлить на знаменатель.

Пусть требуется 5 помножить на 0,4: поелику 0,4 въ десять разъ менѣе 4; то умноживши 5 на 4, получимъ произведеніе 20, которое вдесятеро больше истиннаго искомаго; для сего 20 должно уменьшить въ десять разъ или раздѣлить на 10; выйдетъ 2, число, которое будетъ истинное произведеніе. Также чтобъ 8 помножить на $\frac{3}{4}$,

должно сперва 8 помножить на 3; но какъ 24 будетъ вчетверо болѣе требуемаго произведенія, то надобно 24 раздѣлить на 4; получимъ 6.

В. Но что выйдетъ отъ умноженія 15 на $\frac{5}{7}$?

От. Въ произведеніи получимъ дробь, которую должно найти также по изъясненному правилу: $\frac{5}{7}$ въ семь разъ менѣе 5, слѣд произведеніе 15×5 или 75 всемеро болѣе искомаго; но какъ 75, раздѣленное на 7, дастъ $10\frac{5}{7}$, то $15 \times \frac{5}{7} = 10\frac{5}{7}$. Также $2 \times \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$; $5 \times 0{,}003 = 0{,}015$; $83 \times 0{,}6 = 49{,}8$.

В. Можно ли при разрѣшеніи сихъ вопросовъ сперва дѣлить данное цѣлое число на знаменатель, а потомъ частное помножать на числитель?

От. Можно. На пр. если требуется 8 помножить на 5 и раздѣлить на 4, то собственно должно раздѣлить на 4 сумму $8 + 8 + 8 + 8 + 8$; получимъ $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 5$. Изъ сего видно, что $8 \times 5 : 4 =$

$8 : 4 \times 5$, т. е. перемѣна въ порядкѣ дѣйствій не перемѣняетъ послѣдняго вывода. Основываясь на семъ, можемъ говорить, что $14 \times \frac{3}{7} = 2 \times 3 = 6$; также $17 \times \frac{4}{5} = 3\frac{2}{5} \times 4 = 12\frac{8}{5} = 13\frac{3}{5}$. Второй примѣръ научаетъ, что сей способъ умноженія на дробь выгоденъ токмо въ томъ случаѣ, когда данное число дѣлится на ея знаменатель безъ остатка.

В. По сему правилу можно ли перемножать дробь на дробь?

От. Совершенно безъ исключенія. На примѣръ, чтобъ помножить $\frac{5}{7}$ на $\frac{3}{4}$, надобно помножить на число, которое въ четыре раза меньше 3хъ; слѣд. помноживши $\frac{5}{7}$ на 3, получимъ произведеніе $\frac{15}{7}$, которое также вчетверо больше истиннаго, и потому $\frac{15}{7}$ должно уменьшить въ 4 раза; но видѣли уже, что дробь уменьшается, когда увеличивается ея знаменатель; слѣд. искомое произведеніе будетъ $\frac{15}{28}$.

В. По какимъ образомъ производится умноженіе десятичныхъ дробей?

От. Десятичныя дроби суть также *дроби*; слѣд. нѣтъ причины, для которой общія правила измѣнялись бы въ случаѣ примѣненія ихъ къ десятичнымъ дробямъ. Учащіеся должны твердо помнить сіе замѣчаніе; оно можетъ быть полезно для нихъ во многихъ затруднительныхъ вопросахъ. Посему $0,5 \times 0,3 = 0,15$; $0,007 \times 0,002 = 0,000014$; $0,73 \times 0,8 = 0,584$.

В. Но если при дробяхъ случатся цѣлыя числа?

От. Для большой удобности надобно сперва цѣлыя числа соединить съ дробями. Въ случаѣ десятичныхъ дробей сіе соединеніе весьма просто, какъ уже видѣли; а потому выкладки съ симъ родомъ дробей всегда менѣе затруднительны. Вотъ примѣры:

$3\frac{4}{9} \times 2\frac{7}{11} = \frac{31}{9} \times \frac{29}{11} = \frac{899}{99} = 9\frac{8}{99}$.

$6{,}5 \times 3{,}07 = \frac{65}{10} \times \frac{307}{100} = 19{,}955$.

$21{,}32 \times 0{,}100103 = 2{,}13419596$.

В. Нельзя ли все изъясненное выразить общими правилами?

От, Для умноженія дробей правило одно: *надобно помножить числитель на числитель, а знаменатель на знаменатель.* Но по способу изображенія десятичныхъ дробей правило сіе измѣняется такимъ образомъ: *чтобъ перемножить десятичныя дроби, должно перемножить ихъ какъ цѣлыя числа, забывши запятыя, и потомъ въ произведеніи назначить столько десятичныхъ цыфръ, сколько находится ихъ въ множимомъ и множителѣ.*

По сему правилу слѣдующій примѣръ должно разрѣшить такимъ образомъ: 5,02 требуется помножить на 0,0013; 502 помножаю на 13, получаю 6526; потомъ въ семъ

произведенiи отдѣляю запятою съ правой руки шесть цыфръ; и какъ въ немъ двухъ цыфръ недостаетъ, то недостатокъ сей дополняю нулями; отъ всего выходитъ 0,006526, какъ и должно, поелику произведенiе 65,26 въ десять тысячь разъ болѣе искомаго

В. Не можно ли сдѣлать еще какого нибудь замѣчанiя?

От. Одно, которое будетъ полезно для дѣленiя дробей. Когда, на пр. $\frac{3}{4}$ помножаемъ на $\frac{5}{12}$, тогда $\frac{3}{4}$ увеличиваемъ въ 5 разъ и произведенiе $\frac{15}{4}$ дѣлимъ на 12; слѣд. искомое произведенiе $\frac{15}{48}$ въ пять разъ больше и въ двѣнадцать разъ меньше множимаго $\frac{3}{4}$.

В. Почему это замѣчанiе полезно для дѣленiя дробей?

От. Когда требуется раздѣлить на дробь, на пр. на $\frac{7}{9}$, тогда должно найти такое число, которое будучи помножено на $\frac{7}{9}$, давало бы дѣлимое; а если помножать на $\frac{7}{9}$

значитъ увеличивать въ 7 разъ и уменьшать въ 9 разъ, то искомое частное должно быть въ 7 разъ меньше и въ 9 разъ больше дѣлимаго. Пусть дѣлимое будетъ 8; слѣд. число сіе надобно увеличить въ 9 разъ: выйдетъ 72, и потомъ уменьшить въ 7 разъ: выйдетъ $10\frac{2}{7}$; такъ что $8 : \frac{7}{9} = 10\frac{2}{7}$. Но если потребуется раздѣлить $\frac{5}{11}$ на $\frac{3}{5}$, то по изъясненному должно $\frac{5}{11}$ увеличить въ 5 разъ: получимъ $\frac{25}{11}$; и потомъ уменьшить въ 3 раза: найдемъ $\frac{25}{33}$; слѣд. $\frac{5}{11} : \frac{3}{5} = \frac{25}{33}$. Такимъ же образомъ разрѣшаются и слѣдующіе примѣры:

$$9 : \frac{3}{5} = \frac{45}{3} = 15.$$

$$\frac{45}{60} : \frac{5}{6} = \frac{45 \,.\, 6}{60 \,.\, 5} = \frac{45 : 5}{60 : 6} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

$$8 : 0{,}5 = \frac{80}{5} = 16.$$

$$0{,}002 : 0{,}007 = \frac{2}{7}.$$

$$3\frac{8}{9} : 2\frac{3}{7} = \frac{35}{9} : \frac{17}{7} = \frac{245}{153}.$$

$$2{,}8 : 3{,}005 = \frac{28}{10} : \frac{3005}{1000} = \frac{28000}{30050}.$$

Послѣдніе вопросы показываютъ, что когда при дробяхъ находятся цѣлыя числа, тогда надобно прежде дѣленія соединить ихъ съ дробями.

В. Въ предложенныхъ примѣрахъ встрѣчается надобность дѣлить дроби на цѣлое число: почему же для сего должно помножать на дѣлитель ихъ знаменатели?

От. Потому что частное число меньше дѣлимаго во столько разъ, во сколько дѣлитель больше единицы, и дробь уменьшается, когда увеличивается ея знаменатель. Но если числитель данной дроби можетъ быть раздѣленъ на цѣлое число безъ остатка, то вмѣсто умноженія знаменателя лучше дѣлить числитель: ибо и отъ сего дробь уменьшается. Такъ $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$; $0{,}15 : 3 = 0{,}05$; $0{,}15 : 10 = 0{,}015$; $0{,}15 : 100 = 0{,}0015$; и пр.

В. Видѣли (стр. 71), что одну и ту же дробь можно выражать раз-

личными долями, слѣд. и приводить изъ мѣлкихъ въ крупныя?

От. Дѣйствіе сіе называется *сокращеніемъ* дробей, и возможно только въ томъ случаѣ, когда числитель и знаменатель данной дроби имѣютъ общій цѣльный дѣлитель. Такимъ образомъ

$$\frac{1540}{13650} = \frac{22}{195};$$

потому что 1640 и 13650 дѣлятся на 70. Также

$$\frac{2961}{799} = \frac{63}{17}$$

и пр.

Но дробь $\frac{32}{56}$ не сокращается, поелику ея числитель и знаменатель не имѣютъ общаго дѣлителя.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Практическіе вопросы.

I. Сколько вершковъ содержится въ 15 саж. + 2 ар. + 13 вершкахъ? — Зная, что каждая сажень состоитъ изъ 3 ар., каждый аршинъ изъ 16 вер., находимъ, что 15 саж = 45 ар., придаемъ 2 ар., и въ суммѣ 47 ар. находимъ 752 вер; придавши сюда 13 вер., получаемъ искомое число 765 вер.

Вообще для превращенія высшихъ разрядовъ единицъ въ низшія должно первыя помножать на число, показывающее ихъ взаимное отношеніе. Ежели захотимъ узнать, сколько дней содержится въ 5 годахъ, помножаемъ 5 на 365; въ 7 пудахъ находимъ 280 фунтовъ, потому что каждый пудъ равняется 40 ф., и пр.

II Въ 5634 минутахъ сколько содержится дней, часовъ и минутъ?

Поелику 60 минутъ составляютъ часъ, то для узнанія сколько часовъ находится въ 5634 мин, надобно узнать, сколько разъ должно повторить 60, чтобъ вышло 5634; слѣд. надобно 5634 раздѣлить на 60. Въ частномъ получаемъ 93 и въ остаткѣ 54: посему 5645 = 93 час. + 54 мин. Но какъ сутки раздѣляютъ на 24 часа и 24 въ 93 содержится 3 раза съ остаткомъ 21; то 93 час. = 3 д. + 21 ч. И такъ 5634 мин. = 3 д. + 21 ч. + 54 м.

Вообще нисшій родъ единицъ превращается въ высшій чрезъ дѣленіе первыхъ на ихъ отношеніе ко вторымъ. Чтобъ вершки превратить въ аршины, надобно раздѣлить ихъ на 16; изъ золотниковъ получимъ фунты, когда раздѣлимъ данное число золотниковъ на 96; и пр.

Послѣ сего всѣ прочія дѣйствія съ *именованными числами* не представляютъ уже никакихъ затрудненій, что можно усмотрѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ.

III. Требуется найти сумму 154 тоазовъ + 3 фут. + 7 д. + $9\frac{1}{2}$ лин. 23 т.+2 ф.+8 д.+$11\frac{1}{3}$ л.; 132 т+5ф.+ 10 д. + $3\frac{5}{6}$ л. и 2 ф. + 7 д. + 1 л. Располагаемъ сіи слагаемыя такъ, чтобъ количества одного названія находились въ одномъ столбцѣ; потомъ начинаемъ сложеніе съ нисшаго разряда, и если въ суммѣ окажутся единицы высшаго, то исключаемъ ихъ и придаемъ къ однороднымъ. Такимъ образомъ:

т.	ф.	д.	л.
154 +	3 +	7 +	$9\frac{1}{2}$
23 +	2 +	8 +	$11\frac{1}{3}$
132 +	5 +	10 +	$3\frac{5}{6}$
0 +	2 +	7 +	1
311 +	2 +	10 +	$1\frac{2}{3}$

Вотъ еще примѣры для сложенія:

вер.	с.	ар.	вер.
24 +	150 +	2 +	0
0 +	430 +	0 +	10
10 +	0 +	2 +	13
35 +	81 +	2 +	7

п.	ф.	л.	з.
20 +	32 +	17 +	1
10 +	12 +	13 +	2
0 +	0 +	20 +	0
31 +	5 +	19 +	0

д.	ч.	м.
2 +	10 +	42
5 +	9 +	17
0 +	21 +	3
8 +	17 +	2

IV. Декартъ родился 1596 года 3'го Апрѣля, умеръ 1650 г. 11 Февраля: *спр.* сколько лѣтъ онъ жилъ? Поелику отъ начала нашего лѣтосчисленія до смерти Декарта прошло 1649 л. + 1 м. + 10 д., до его рожденія 1595 л. + 3 м. + 2 д.; то разность сихъ двухъ временъ будетъ искомое число лѣтъ жизни сего знаменитаго Математика. Но чтобъ произвести вычитаніе, должно уменьшаемое представить въ такомъ видѣ: 1648 л. + 13 м. + 10 д.; послѣ сего не трудно уже найти разность 53 г. + 10 м. + 8 д.

Вообще для вычитанія именованныхъ чиселъ должно находить разности между однородными изъ нихъ, и заимствовать отъ высшихъ порядковъ, какъ скоро въ какомъ

нибудь порядкѣ уменьшаемаго встрѣтится число, меньшее соотвѣтствующаго вычитаемаго. Вотъ еще примѣры:

ф.	ун.	др.	гр.
32 +	9 +	2 +	44
12 +	12 +	5 +	12
19 +	12 +	5 +	32

т.	ф.	д.	л.
487 +	0 +	0 +	0
319 +	0 +	0 +	10
167 +	1 +	8 +	2

д.	ч.	м.	с.
17 +	11 +	47 +	5
13 +	18 +	55 +	40
3 +	16 +	51 +	25

Не худо разрѣшить и слѣдующіе вопросы, подобные первому. Паскаль родился 19 Іюня 1623 года, умеръ 19 Августа 1662 г. Нютонъ родился 15 Декабря 1642 года, умеръ 18 Марта 1727 года Найдется, что Паскаль жилъ 39 л. + 1 м., а Нютонъ 84 г. 3 м. + 3 д.

V. Чтобъ показать, какимъ образомъ производится умноженіе именованныхъ чиселъ, разрѣшимъ слѣдующіе вопросы:

1. За одинъ аршинъ сукна платится 25 р. + 12 к.; *спр.* сколько должно заплатить за $17\frac{2}{3}$ арш.? — Очевидно, что сперва 25 р. + 12 к. надобно повторить 17 разъ, а потомъ отъ сего же числа денегъ взять $\frac{2}{3}$, и выводы сложить. И такъ $17\frac{2}{3}$ ар. превращается въ число, и потому упомянутыя дѣйствія должно произвести слѣдующимъ образомъ:

$$12\text{ к.}\times 17\tfrac{2}{3} = (204 + 8)\text{ к.} = 2\text{ р.} + 12\text{ к.}$$

$$16\text{ р.}\times 17\tfrac{2}{3} = (425 + 16\tfrac{2}{3})\text{ р.} = 441 + 66\tfrac{2}{2}$$

$$443\text{ р.} + 78\tfrac{2}{3}\text{ к.}$$

Тотъ же вопросъ можно разрѣшить еще такимъ образомъ: послику . . .

$15\text{ р.} + 12\text{ к.} = 15{,}12\text{ р.}$, то

$$15{,}12\times 17\tfrac{2}{3} = 15{,}12\times\tfrac{53}{3} = 443{,}78\tfrac{2}{3}\text{ руб.}$$

2. Но если множитель будетъ одно цѣлое число, то умноженіе производится какъ сложеніе. Примѣръ:

57 фун. + 5 ун. + 4 др. + 18 гр.
×7

401 +6 +5 +54.

3. Нѣкто проѣхалъ въ одинъ день 50 вер. + 300 с. + 1 арш. *Спр.* сколько проѣдитъ онъ въ 1 мѣс + 12 д. + 1 ч? — Вопервыхъ замѣчаю, что 1 м. + 12 д. + 1 ч. есть то же, что 42 д. + 1 ч. или $42\frac{1}{24}$ д. Теперь принявши $42\frac{1}{24}$ д. за число, помножаю на него 50 вер + 300 с. + 1. арш., и нахожу

$1^{ар.} \times 42\frac{1}{24} =$	$0^{в.}$	$+ 14с.$	$+ \frac{1}{24}ар.$
$300^{с.} \times 42\frac{1}{24} =$	25	$+112$	$+1\frac{1}{2}$
$50^{вс.} \times 42\frac{1}{24} =$	2102	$+ 41$	$+2$
Искомое число	2127	$+168$	$+\frac{13}{24}$

или $2127^{вс.} + 168с. + 8\frac{2}{3}$вер.

VI. Для образца дѣленія предлагаются слѣдующіе вопросы:

1 Работникъ въ 42 дни получилъ 151 р. + 14 к. *Спр.* сколько получалъ онъ каждый день? — Небольшое требуется вниманіе, чтобъ усмотрѣть, что для рѣшенія вопроса надобно 42 д принять за число и раздѣлить на него 151 руб. + 14 коп. Сіе производится такимъ образомъ:

$(151$ р. $+ 14$ к.$) : 42 = 3$ р. $+ 59\frac{6}{7}$ к.

```
 126
 ----
 2500
   14
 ----
 2514
 2100
 ----
  414
  378
  ---
   36
```

2. За 42 т. $+ 5$ ф. $+ 4$ д. заплачено 554 р. $+ 13$ к. *Спр.* чего стоитъ одинъ тоазъ? — Вопервыхъ, поелику 5 ф. есть $\frac{5}{6}$ тоаза, а 4 д. $= \frac{4}{12}$ или $\frac{1}{3}$ ф.; слѣд. 42 т. $+ 5$ ф. $+ 4$ д $= \frac{772}{18}$ т. Теперь 554 р. $+ 13$ к. должно раздѣлить на $\frac{772}{18}$, или должно найти

$(554$ р. $+ 13$ к.$) \times \frac{18}{772} =$

$(9974$ р. $+ 34$ к.$) : 772 =$ 12 р. $+ 92\frac{5}{386}$ к.

```
 7720
 ----
 2254
 1544
 ----
```

$$\begin{array}{r} 71000 \\ 34 \\ \hline 71034 \\ 69480 \\ \hline 1554 \\ 1544 \\ \hline 10 \end{array}$$

3. Спрашивается: 152 пуд. + 30 ф. + 16 лот. во сколько разъ больше 11 пуд. + 17 ф. + 12 лот.? Прежде замѣтимъ, что 152 п. + 30 ф. + 16 лот. = 152 п + $30\frac{1}{2}$ ф. = 152 п. + $\frac{61}{2}$ ф. = $(152 + \frac{61}{80})$ п. = $\frac{12221}{80}$ п.; также 11 пуд. + 17 ф. + 12 л. = $\frac{3659}{320}$ п.; послѣ сего, принявши сіи количества за числа, должно сдѣлать. . .

$$\frac{12221}{80} : \frac{3659}{320} = \frac{12221\ 4.80}{80.\ 3659} = \frac{48884}{3659} = 13\frac{1317}{3659}.$$

УРОКЪ V.

О квадратахъ и объ извлеченіи квадратныхъ корней.

В. Когда слагаемыя числа равны между собою, тогда сложеніе называется *умноженіемъ*: но если перемножаются равные производители, то дѣйствіе сіе и найденное произведеніе не получаютъ ли также другихъ названій?

От. Произведеніе, составленное изъ равныхъ производителей, называютъ *степенью*; самое же перемноженіе — *возвышеніемъ въ степень*.

В. Общее названіе степени не измѣняется ли по числу ея производителей?

От. Если степень составляется изъ двухъ равныхъ производителей, то ее разумѣютъ подъ именемъ *квад-*

рата; ежели изъ трехъ, то подъ именемъ *куба*. Далѣе степени особенныхъ названій не имѣютъ, а говорятъ просто: *четвертая*, *пятая*, *шестая*, и пр степень, когда произведеніе состоитъ изъ четырехъ, пяти, шести и пр. равныхъ производителей.

В. И такъ изъ произведеній 5.5, 5.5.5, 5.5.5.5, 5.5.5.5.5, 5.5.5.5.5 5, и пр. первое есть *квадратъ*, второе — *кубъ*, третье — *четвертая*, четвертое — *пятая*, пятое — *шестая степени* одного и того же числа 5?

От. Точно такъ. Притомъ изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что чѣмъ выше степень, тѣмъ неудобнѣе ея изображеніе въ видѣ произведенія; по сей причинѣ сокращаютъ сіе изображеніе такимъ образомъ: *вмѣсто всѣхъ производителей пишутъ только одинъ и на верху съ правой руки поставляютъ цыфру, означающую число оныхъ производителей*, по-

чему цыфра сія и называется *показателемъ.* Сообразно съ симъ

Квадратъ числа 5 или 5.5 изображается чрезъ 5^2,
Кубъ ——— 5 или 5.5.5 — 5^3,
Четвертая степень 5 или 5.5.5.5 — 5^4,
Пятая ——— 5 или 5.5.5.5.5 — 5^5,
и т. д.

В. Ежели перемѣняется названіе произведенія, то не должно ли перемѣнить и названіе производителя?

От. Каждый изъ равныхъ производителей называется *корнемъ* своего произведенія: 5 есть *квадратный корень* вразсужденіи 5.5 или 5^2; *кубическій* вразсужденіи 5^3 или 5.5.5, и пр. Сверхъ того принято особенное изображеніе сихъ понятій: $\sqrt{25}$ изображаетъ квадратный корень изъ 25; $\sqrt[3]{81}$ представляетъ кубическій корень изъ 81, или такое число, которое будучи помножено само на себя *два* раза, даетъ въ произве-

деніи 81; и $\sqrt{\frac{5}{7}}$ означаетъ дробь, которая будучи помножена сама на себя *одинъ* разъ, даетъ $\frac{5}{7}$; именно: $\sqrt{\frac{5}{7}} \times \sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}$, $\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{81} = 81$, и т. д.

В. Для чего употребляютъ сей знакъ, когда вмѣсто его можно писать самое число? на пр., вмѣсто $\sqrt[3]{125}$ не лучше ли писать просто 5?

От. Но какое число напишемъ вмѣсто $\sqrt[3]{81}$. Можно только найти, что $\sqrt[3]{81}$ выражаетъ число, которое болѣе 4 и менѣе 5; также $\sqrt{15}$ представляетъ число, содержащееся между 3 и 4. И такъ сіе изображеніе необходимо для тѣхъ случаевъ, когда не можемъ опредѣлить точную величину корня, и по этой причинѣ *знакъ употребляется въ вычисленіяхъ за изображаемое имъ число.*

В. Есть ли общія правила для *извлеченія* корней?

От. Есть; но прежде должно разсмотрѣть составленіе степеней. Въ семъ урокѣ займемся составленіемъ квадратовъ и извлеченіемъ корней квадратныхъ. Поелику въ нашемъ счисленіи 1, 10, 100, 1000, и пр. суть предѣлы, между которыми заключаются прочія числа, то сдѣлаемъ сперва замѣчаніе о квадратахъ изъ сихъ чиселъ: находимъ, что

$$10^2 = 10 . 10 = 100,$$

$$100^2 = 100.100 = 10000,$$

$$1000^2 = 1000.1000 = 1000000.$$

$$10000^2 = 10000.10000 = 100000000,$$

и пр.

В. По разсмотрѣніи сихъ выводовъ, не должно ли заключить, что *квадраты содержатъ вдвое болѣе нулей, чѣмъ корни?*

От. Заключеніе справедливо; вотъ и еще примѣры для подтвержденія:

$$30^2 = 30 . 30 = 900,$$
$$300^2 = 300 . 300 = 90000,$$
$$3000^2 = 3000 . 3000 = 9000000,$$

и пр.

Притомъ надобно замѣтить, что сіе правило есть необходимое слѣдствіе правила о числѣ нулей во всякомъ произведеніи (стр. 25).

В. Послѣ сего не льзя ли вывести замѣчаніе вообще о числѣ цыфръ въ квадратахъ?

От. Весьма легко; для сего будемъ разсуждать такимъ образомъ: всѣ числа, выражаемыя одною цыфрою заключаются между 1 и 10; слѣд. ихъ квадраты должны содержаться между квадратами отъ 1 и 10, т. е. между 1 и 100, а потому могутъ быть представлены одной или двумя цыфрами, т. е.

(1 *цыф.*)^2 содержитъ 1 или 2 цыфры.

Всѣ числа, выражаемыя двумя цыфрами, болѣе 10, и менѣе 100; слѣд.

ихъ квадраты должны быть болѣе 10^2 или 100, и менѣе 100^2 или 10000, а потому они будутъ выражаться или 3 или 4 цыфрами, т. е.

(2 *цыф.*)^2 содержитъ 3 или 4 цыфры.

Всѣ числа, выражаемыя тремя цыфрами болѣе 100, и менѣе 1000, слѣд. ихъ квадраты будутъ больше 100^2 или 10000, и менѣе 1000^2 или 1000000, а потому они должны выражаться 5 ю или 6 ю цыфрами; т. е.

(3 *цыф.*)^2 содержитъ 5 или 6 цыфръ.

Продолжая сіи разсужденія, увидимъ, что

(4 *цыф.*)^2 содержитъ 7 или 8 цыфръ,

(5 *цыф.*)^2 ——— 9 или 10 цыфръ,

(6 *цыф.*)^2 ——— 11 или 12 цыфръ, и пр.

Изъ разсматриванія сихъ выводовъ получаемъ требуемое правило:

число цыфръ квадрата или ровно вдвое, или вдвое безъ одной болѣе числа цыфръ корня.

В. И такъ на основаніи сего правила нетрудно опредѣлять число цыфръ корня по числу цыфръ даннаго квадрата?

От. Безъ сомнѣнія: ежели въ квадратѣ 13 фыфръ, то въ его корнѣ будетъ 7 цыфръ; ежели въ квадратѣ 8 цыфръ, то въ корнѣ 4, и пр.

В. Послѣ сего можно уже приступить къ извлеченію квадратныхъ корней?

От. Нѣтъ еще: надобно сыскать общее правило для составленія квадратныхъ корней. Мы найдемъ его изъ разсмотрѣнія тѣхъ частныхъ произведеній, которыя входятъ въ составъ квадрата, происходящаго отъ умноженія числа самаго на себя. Возьмемъ для перваго примѣра число 46, состоящее изъ десятковъ и единицъ; чтобъ составить

изъ него квадратъ, должно 4 десятка или 40 и 6 единицъ помножить на 40 и 6 един. и потомъ произведенія сложить; выйдетъ

$$46 \times 46 = (46)^2 = 40.40 + 40.6 + 6.40 + 6.6$$
$$= (40)^2 + 2.40.6 + 6^2,$$

т. е. *квадратъ числа, выраженнаго двумя цыфрами, содержитъ квадраты десятковъ и единицъ съ удвоеннымъ произведеніемъ десятковъ на единицы.*

Ежели число будетъ 326, то опять

$(326)^2 = 6^2 + 20 . 6 + 300.6 + 6.20 +$
$(20)^2 + 300 . 20 + 6 . 300 + 20 . 300 +$
$(300)^2 = (300)' + 2 . 300\ 20 + 2.300.6 +$
$(20)^2 + 2 . 20.6 + 6^2$, т. е. *квадратъ числа, выраженнаго тремя цыфрами, содержитъ квадраты сотенъ, десятковъ и единицъ съ удвоенными произведеніями сотенъ на десятки и единицы; также десятковъ на единицы.*

Поступивъ такимъ же образомъ, усмотримъ, что *квадратъ числа, выраженнаго четырьмя цыфрами, состоитъ изъ квадратовъ тысячь, сотенъ, десятковъ и единицъ, и изъ удвоенныхъ произведеній тысячь на сотни, на десятки и единицы, сотенъ на десятки и единицы, и наконецъ десятковъ на единицы.*

Послѣ сего нетрудно уже вывести слѣдующее общее правило для составленія квадратовъ: *квадратъ всякаго числа содержитъ квадраты всѣхъ цыфръ съ соблюденіемъ ихъ порядковъ и удвоенныя произведенія каждой высшей цыфры на всѣ нисшія.* По сему правилу найдемъ, что $(56834)^2 =$

$$2500000000 = (50000)^2$$
$$600000000 = 2.50000.6000$$
$$80000000 = 2.50000.800$$
$$3000000 = 2.50000.30$$
$$400000 = 2.50000.4$$
$$36000000 = (6000)^2$$

$$
\begin{aligned}
9600000 &= 2.6000.800\\
360000 &= 2.6000.30\\
48000 &= 2.6000.4\\
640000 &= (800)^2\\
48000 &= 2.800.30\\
6400 &= 2.800.4\\
900 &= (30)^2\\
240 &= 2.30.4\\
16 &= 4^2\\
\hline
323010&3556
\end{aligned}
$$

Также

$$
\begin{aligned}
(8004)^2 = 64000000 &= (8000)^2\\
64000 &= 2.8000.4\\
16 &= \quad 4^2\\
\hline
6406&4016.
\end{aligned}
$$

Поелику въ данномъ корнѣ нѣтъ ни сотенъ, ни десятковъ, слѣд. въ его квадратѣ не будетъ ни квадратовъ сотенъ, ни квадратовъ десятковъ, ни удвоенныхъ произведеній сихъ порядковъ единицъ на нисшіе и высшіе.

В. Теперь для извлеченія корней не должно ли поступать обратно?

От. Точно такъ. Возьмемъ для примѣра, число 316969. Поелику по правилу о числѣ цыфръ квадрата должно заключить, что искомый корень будетъ содержать три цыфры, т. е. сотни, десятки и единицы; слѣд. $316969 = (\textit{сот.})^2 + 2\ \textit{сот.} \times \textit{десят.} + 2.\textit{сот.} \times \textit{ед.} + (\textit{дес.})^2 + 2.\textit{дес.} \times \textit{ед.} + (\textit{ед.})^2$.

По сей табличкѣ нетрудно уже опредѣлить цыфры сотенъ, десятковъ и единицъ. Въ самомъ дѣлѣ, поелику квадратъ сотенъ будетъ содержать четыре нуля, то квадратъ цыфры сотенъ долженъ быть не болѣе 31; но $6^2 = 36$, слѣд. въ искомомъ корнѣ 5 сотенъ. Когда посредствомъ вычитанія изключимъ 250000 квадратъ сихъ сотенъ изъ 316969, тогда въ остаткѣ 66969 будутъ содержаться всѣ члены таблички, кромѣ $(\textit{сот.})^2$. Но чтобъ опредѣлить величину сихъ членовъ, надобно сыскать цыфру десятковъ; для сего беремъ $2.\ \textit{сот.} \times \textit{десят.}$ и разсуждаемъ: въ сотняхъ содержится два

нуля, въ десяткахъ одинъ; слѣд. въ ихъ произведенiи будетъ три нуля, и удвоенное произврденiе цыфры сот. на цыфру десят. не должно превышать 66; посему цыфра десятковъ есть 6: ибо 2. 500. 60 = 60000. По опредѣленiи цыфры десятковъ, квадратъ оныхъ становится также извѣстнымъ; почему и придаемъ его къ оному удвоенному произведенiю; въ суммѣ получаемъ 63600. Ежели опять посредствомъ вычитанiя исключимъ сiе число изъ 66969, то во второмъ остаткѣ 3369 будутъ содержаться только 2. *сот.* × *ед.* + 2. *дес.* × *ед.* + (*един.*)^2. Чтобъ опредѣлить сiи члены, въ которыхъ сотни и десятки уже извѣстны, остается найти цыфру единицъ. Но какъ произведенiе сотенъ на единицы будетъ содержать два нуля, то удвоенное произведенiе цыфръ сотенъ и единицъ не можетъ быть болѣе 33, и потому за цыфру единицъ должно взять 3. Послѣ сего получимъ 2. *сот.* × *ед.* =

3000, 2. *дес.* × *ед.* = 360, и (*един*)^2=9, а въ суммѣ 3369. И такъ 563 есть точный квадратный корень числа 316969 Всѣ сіи изысканія располагаются въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{rrr} & \sqrt{316969} = & 500 \\ (500)^2 = & 250000 & 60 \\ & 66969 & 3 \\ 2.500.60 + (60)^2 = & 63600 & 563 \\ & 3369 & \\ 2.500.3 + 2.60.3 + 3^2 = & 3369 & \\ & 0 & \end{array}$$

Вотъ еще примѣръ: извлечь квадратный корень изъ 1111088889. По числу цыфръ сего квадрата заключаемъ, что корень будетъ состоять изъ десятковъ тысячь, изъ тысячь, сотенъ, десятковъ и единицъ; посему 1111088889 = (*дес. тыс.*)^2 + ... 2. *дес. тыс.* × *тыс.* + 2. *дес. тыс.* × *сот.* + 2. *дес. тыс.* × *дес.* + 2. *дес. тыс.* × *ед.* + (*тыс.*)^2+2. *тыс* × *сот.* + 2. *тыс.* × *дес.* + 2. *тыс.* × *ед.* + (*сот.*)^2 + ...

$2.\,сот.\times дес. + 2.\,сот.\times ед. + (дес)^2 +$
$2.\,дес.\times ед. + (един.)^2.$

Руководствуясь сею табличкой и изъясненнымъ рѣшенiемъ предыдущаго примѣра, нетрудно уже опредѣлить цыфры корня, начиная съ высшихъ, такимъ образомъ:

$\sqrt{1111088889} = 30000$

$(30000)^2 = 900000000$ 3000

                                    300

$2.30000.3000 +$ 211088889 30

$(3000)^2 = 189000000$ 3

$2.30000.300 +$ 22088889 33333

$2.3000.300 + (300)^2 = 19890000$

$2.30000.30 +$ 2198889

$2.3000.30 +$

$2.300.30 + (30)^2 = 1998900$

$2.30000.3 + 2.3000.3 +$ 199989

$2.300.3 + 2.30.3 + 3^2 = 199989$

0

Ежели изъ даннаго числа не можно извлечь точнаго корня, то посредствомъ изъясненнаго способа находимъ числа, между которыми сей корень содержится. Вотъ примѣры:

$\sqrt{1111111} =$	1000	$\sqrt{123456789} =$	10000
1000000	50	100000000	1000
111111	4	23456789	100
102500	1054	21000000	10
8611		2456789	1
8416		2210000	11111
195		246789	
		222100	
		24689	
		22221	
		2468	

Въ первомъ примѣрѣ искомый корень содержится между 1054 и 1055, а во второмъ между 11111 и 11112.

В. Но какимъ образомъ извлекаются квадратные корни изъ дробей?

От. Поелику $(\frac{5}{3})^2 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$, т. е. квадратъ дроби составляется изъ квадратовъ числителя и знаменателя; слѣд. чтобъ извлечь квадратный корень изъ дроби, должно извлечь квадратные корни изъ числителя и знаменателя. Такъ $\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{0,25} = 0,5$; и пр.

В. А чему равняется $\sqrt{\frac{5}{7}}$, $\sqrt{\frac{11}{13}}$, и пр. вообще: какъ должно извлекать корни изъ дробей, въ коихъ числитель и знаменатель суть неточные квадраты?

От. Полное рѣшеніе сего вопроса здѣсь предложить не можемъ; а сдѣлаемъ только одно замѣчаніе: извлеченіе двухъ квадратныхъ корней изъ числителя и знаменателя должно замѣнить извлеченіемъ одного корня изъ числителя: для сего стоитъ токмо числитель и знаменатель данной дроби помножить на ея знаменатель; тогда сей послѣдній сдѣлается квадратнымъ числомъ. Такъ $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$, и пр.

В. Относится ли сіе правило и къ десятичнымъ дробямъ?

От. Можетъ относиться; но чтобъ не увеличивать чиселъ безъ надобности, то должно числитель

и знаменатель помножать только на 10. Такъ $\sqrt{0,5} = \sqrt{0,50} = \frac{\sqrt{50}}{10}$, $\sqrt{0,003} = \sqrt{0,0030} = \frac{\sqrt{30}}{100}$, и пр.

УРОКЪ VI.

О кубахъ и объ извлеченіи кубическихъ корней.

В. Въ началѣ предыдущаго урока объяснено, какія числа называются *кубомъ* и *кубическимъ корнемъ*, и какъ они изображаются сокращенно: теперь должно замѣтить, что при истолкованіи составленія и извлеченія кубовъ и ихъ корней должно слѣдовать тому же порядку, по какому предложены правила о составленіи и извлеченіи квадратовъ и ихъ корней; посему спрашиваемъ: какое отношеніе между числомъ нулей корня и куба?

От. Кубъ составляется изъ умноженія квадрата на корень; квадратъ содержитъ двойное число нулей противъ корня, и въ произведеніи столько нулей, сколько ихъ въ обоихъ производителяхъ: слѣд. *чис-*

ло нулей куба втрое болѣе числа нулей корня. Такъ $(10)^3 = (10)^2 \times 10 = 1000$, $(1000)^3 = 1000000000$, и пр.

В. Послѣ сего должно найти общее правило о числѣ цыфръ куба?

От. Для рѣшенія сего вопроса будемъ разсуждать также какъ о квадратахъ: числа, выражаемыя одною цыфрою, содержатся между 1 и 10: кубы ихъ должны содержаться между 1^3 или 1, и $(10)^3$ или 1000, слѣд. они могутъ быть выражены 1, 2 и 3 цыфрами, т. е.

(1 *цыф.*)^3 содержитъ 1, 2, 3, цыфры.

Числа, заключающіяся между 10 и 100, выражаются двумя цыфрами, и кубы ихъ, содержащіеся между $(10)^3$ или 1000, и $(100)^3$ или 1000000, могутъ быть представлены 4, 5 и 6 цыфрами; слѣд.

(2 *цыф.*)^3 содержитъ 4, 5, 6 цыф.

Продолжая сіи разсужденія, усмотримъ, что

$(3$ *цыф.*$)^3$ содержитъ 7, 8, 9 цыф.
$(4$ *цыф.*$)^3$ —— 10, 11, 12 —
$(5$ *цыф.*$)^3$ —— 13, 14, 15 — и пр.

Отсюда общее правило: *число цыфръ куба противъ числа цыфръ корня болѣе или ровно втрое, или втрое безъ одной и безъ двухъ цыфръ.*

В. Наконецъ, какимъ образомъ составляются кубы изъ чиселъ, выраженныхъ многими цыфрами?

От. Возьмемъ для примѣра число 75, котораго квадратъ будетъ $(70)^2 + 2.70.5 + 5^2$, Чтобъ получить кубъ, должно сей квадратъ помножить еще на 75; выйдетъ $(70)^2 . 5 + 2.70, 5^2 + 5^3 + (70)^3 + 2.(70)^2 . 5 + 5^2 . 70$, что сократится такъ:

$$(70)^3 + 3.(70)^2.5 + 3.70.5^2 + 5^3$$

Посему *кубъ числа, содержащаго десятки и единицы, состоитъ изъ кубовъ десятковъ и единицъ съ утроенными произведеніями квадрата десятковъ на единицы и квадрата единицъ на десятки.*

В. Но если корень будетъ многосложнѣе?

От. Ежели потребуется возвысить въ кубъ 845, то сперва представимъ, что данное число состоитъ изъ десятковъ и единицъ, именно: изъ 84 десятковъ или изъ 840 и изъ 5 единицъ. Послѣ сего по изъясненному правилу найдемъ

$$(845)^3 = (840)^3 + 3.(840)^2.5 + 3.840.5^2 + 5^3.$$

Потомъ число 840 раздѣлимъ на 80 десятковъ или 800 и на 40 единицъ; чрезъ сіе раздѣленіе получимъ

$$(840)^3 = (800)^3 + 3.(800)^2.40 + 3.800.(40)^2 + (40)^3,$$

$$3.(840)^2.5 = 3.5.(800)^2 + 2.3.5.800.40 + 3.5.(40)^2.$$

Вставивши сіи выраженія въ первое, выведемъ, что

$$(845)^3 = (800)^3 + 3.(800)^2.40 + 3.(800)^2.5 + (40)^3 + 3.(40)^2.800 + 3.(40)^2.5 + 5^3 + 3.5^2.800 + 3.5^2.40 + 6.800.40.5.$$

Точно такимъ образомъ должно поступать при составлении кубовъ изъ многосложнѣйшихъ чиселъ, и разсмотрѣвши выводы, можно было бы сдѣлать общее заключеніе о возвышеніи въ кубъ всякаго даннаго числа; но сіе заключеніе для Ариѳметическихъ вычисленій безполезно; притомъ Алгебра дастъ удобнѣйшіе способы для открытія общаго правила о возвышеніи чиселъ во всякую степень: по сей причинѣ здѣсь не имѣемъ надобности говорить о семъ предметѣ съ подробностію.

В. Какимъ же образомъ извлекаются кубическіе корни?

От. Требуется извлечь кубическій корень изъ 21952. Основываясь на вышепредложенномъ, видимъ, что искомый корень состоитъ изъ 2хъ цыфръ; слѣд. 21952 равняется кубу десятковъ, утроенному произведенію квадрата десятковъ на единицы, и проч. Но кубъ цыфры десятковъ будетъ имѣть три нуля; слѣд., кубъ самой цыфцы не долженъ пре-

вышать 21, и посему оная цыфра есть 2, поелику $3^3 =$ уже 27. И такъ беру $(20)^3$ и 8000 вычитаю изъ 21952; въ остаткѣ 13952 должны заключаться утроенныя произведенія квадрата десятковъ на единицы, просто десятковъ на квадратъ единицъ и кубъ единицъ. А какъ $3.(20)^2 = 1200$, то за цыфру единицъ надобно взять 8 и найти $3.(20)^2.8 = 9600$, $3.20 \times 8^2 = 3840$ и $8^3 = 512$; сумма всѣхъ сихъ чиселъ есть 13952, т. е. $21952 = (28)^3$. Все вычисленіе представляется въ такомъ видѣ:

$$
\begin{array}{rrr}
 & \sqrt[3]{21952} = & 20 \\
(20)^3 = & 8000 & 8 \\
\hline
 & 13952 & 28 \\
3.(20)^2 \times 8 + 3.20 \times 8^2 + 8^3 = & 13952 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Теперь пусть требуется извлечь кубическій корень изъ 1230547200о. Поелику искомый корень будетъ со-

стоять изъ четырехъ цыфръ, и кубъ цыфры тысячь имѣетъ при себѣ 9 нулей, слѣд. самая цыфра должна быть 2, ибо $3^3 =$ уже 27, что болѣе 12. И такъ беру $(2000)^3$ и 8000000000 вычитаю изъ даннаго числа, получаю въ остаткѣ 4305472000. Послѣ сего, чтобъ докончить извлеченіе по примѣру предыдущаго, принимаю найденную цыфру тысячь за цыфру десятковъ и нахожу цыфру единицъ; но какъ сія цыфра на самомъ дѣлѣ будетъ цыфра сотенъ; то утроенное ея произведеніе на квадратъ найденной цыфры будетъ имѣть при себѣ 8 нулей, и притомъ $3 \cdot 2^2 = 12$; слѣд. искомая цыфра должна быть 3; потомъ беру $3 . (2000)^2 \times 300 = 3600000000$, $3.2000 \times (300)^2 = 540000000$ и $(300)^3 = 27000000$, и сумму всѣхъ трехъ выводовъ, $= 4167000000$, вычитаю изъ полученнаго остатка; выходитъ 138472000. Сообразуясь опять съ предыдущимъ примѣромъ, найден-

ную часть корня 2300 принимаю за десятки онаго и начинаю искать цыфру единицъ, которая въ самомъ дѣлѣ будетъ цыфра десятковъ. Поступивши также какъ находили цыфру сотенъ, усмотримъ, что искомая цыфра десятковъ есть 0; и слѣд. останется опредѣлить дѣйствительную цыфру единицъ. Для сего составляю $3.(2300)^2 \times 8 = 126960000$, $3.2300 \times 8^2 = 441600$ и $8^3 = 512$; сумму 127402112 вычитаю изъ втораго остатка, и какъ получаю еще остатокъ, то заключаю, что. . . .
$1230547200 = (2308)^3 + 11069888$.

$$
\begin{array}{rrr}
 & \sqrt[3]{1230547200} = & 2000 \\
(2000)^3 = & 8000000000 & 300 \\
3.(2000)^2 \times 300 + & 4305472000 & 8 \\
3.2000 \times (300)^2 + & & 2308 \\
(300)^3 = & 4167000000 & \\
3.(2300)^2 \times 8 + 3.2300 & 138472000 & \\
\times 8^2 + 8^3 = & 127402112 & \\
 & 11069888 &
\end{array}
$$

Сей примѣръ показываетъ, что искомый корень содержится между числами 2308 и 2309.

В. Не можно ли изъясненныя правила для извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней дополнить практическими замѣчаніями?

От. Вопервыхъ замѣтимъ, что получивши навыкъ въ сихъ исчисленіяхъ, можно опускать нули, и тогда къ остаткамъ должно сносить по двѣ цыфры въ квадратѣ и по три въ кубѣ. Притомъ поелику на каждыя двѣ цыфры квадрата и три цыфры куба соотвѣтствуетъ по одной цыфрѣ корня, то производя извлеченіе безъ нулей, нельзя *задаваться* болѣе 9. Вотъ примѣры таковыхъ извлеченій:

$$\sqrt{89|63|45} = 946$$

81
863
72
16
736

$$\sqrt[3]{1|234|567} = 107$$

1
234567
$2100 = 3.(10)^2.7$
$1470 = 3.10.7^2$
$343 = 7^3$

12745 · · · · · 225043
1128 · · · · · 9524
36
11316
1429

Потомъ какъ въ умноженія и дѣленіи весьма помогаетъ *табличка умноженія*, такъ для составленія квадратовъ и кубовъ, и для извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней должно заучить квадраты и кубы всѣхъ первыхъ девяти чиселъ:

Корни.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Квадр.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Кубы.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

В. Какимъ образомъ извлекаются кубическіе корни изъ дробей?

От. Должно извлекать сіи корни изъ числителей и изъ знаменателей; но для сокращенія дѣйствія числитель и знаменатель данной дроби помножается на квадратъ знамена-

теля, или иногда на 10, иногда на 100, когда дробь будетъ десятичная.

Такъ $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5.49}{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{245}}{7}$, $\sqrt[3]{0,5}=$

$\sqrt{0,500}=\frac{\sqrt[3]{500}}{10}$, $\sqrt[3]{0,73}=\sqrt[3]{0,730}=$

$\frac{\sqrt[3]{730}}{10}$.

УРОКЪ VII.

О вычисленіяхъ приближенныхъ.

В. Положимъ, что три купца должны раздѣлить 100 р. такъ, чтобъ первый получилъ $27\frac{7}{9}$ р., второй — $33\frac{3}{9}$ р., третій $38\frac{8}{9}$ р.; для уразумѣнія величины дробей $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{8}{9}$ надобно выразить ихъ въ сотыхъ доляхъ рубля или въ копейкахъ: нетрудно понять, что величина первой дроби найдется, когда 100 помножится на 7 и раздѣлится на 9, второй, — когда 100 помножится на 3 и раздѣлится на 9, третьей, — когда 100 помножится на 8 и раздѣлится на 9; чрезъ сіе получимъ

$\frac{7}{9} = 77\frac{7}{9}$ коп., $\frac{3}{9} = 33\frac{3}{9}$ к., $\frac{8}{9} = 88\frac{8}{9}$ к.

И такъ доля

первaго купца будетъ 27 р. $77\frac{7}{9}$ к.
втораго —— ——— 33 р. $33\frac{3}{9}$ к.
третьяго —— ——— 38 р. $88\frac{8}{9}$ к.

Сіи величины долей суть точныя, потому что сумма ихъ совершенно равняется 100 руб.; но если оставимъ доли копеекъ, то въ суммѣ найдемъ 99 р. 98 к.; слѣд. недостанетъ только 2 к. Изъ сего примѣра заключаю, что въ практикѣ можно довольствоваться приближенными числами. Отсюда рождается вопросъ: ежели величина какой нибудь вещи выражена дробью, которой числитель и знаменатель суть числа многосложныя, и которая не сокращается, то нельзя ли находить простѣйшую дробь приближенную?

От. Вопросъ сей разрѣшается посредствомъ дробей, называемыхъ *непрерывными.*

В. Какимъ образомъ составляются сіи дроби?

От. Возьмемъ для примѣра дробь $\frac{95}{161}$; раздѣлимъ ея числитель и знаменатель на числитель; получимъ

$$\frac{95}{161} = \frac{1}{1+\frac{66}{95}}$$

И

Сдѣлавши тоже съ дробью $\frac{66}{95}$, найдемъ уже

$$\frac{95}{161} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{29}{66}}}$$

Но какъ $\frac{29}{66} = \cfrac{1}{2 + \frac{8}{29}}$, то

$$\frac{95}{161} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{8}{29}}}}$$

Превратившн $\frac{8}{29}$ въ $\cfrac{1}{3 + \frac{5}{8}}$, выведемъ

$$\frac{95}{161} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{5}{8}}}}}$$

Опять $\frac{5}{8} = \cfrac{1}{1 + \frac{3}{5}}$; слѣд.

$$\frac{95}{161}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{3}{5}}}}}}$$

Еще $\frac{3}{5}=\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}$; слѣд.

$$\frac{95}{161}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}}}}$$

Наконецъ $\frac{2}{3}=\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$, и потому $\frac{95}{161}$ разлагается въ дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}}$$

въ которой каждая дробь есть часть знаменателя предыдущей, и которая называется по сей причинѣ *непрерывною.*

В. Составленіе подобныхъ дробей не сходно ли съ нахожденіемъ общаго большаго дѣлителя?

От. Совершенно: если бы требовалось найти большой общій дѣлитель для 95 и 161, то рѣшеніе надлежало бы расположить въ такомъ видѣ:

161	95	66	29	8	5	3	2	1
	1	1	2	3	1	1	1	2

После сего надобно только составить дроби, коихъ числители суть единицы, а знаменатели частныя 1, 1, 2 и пр. и соединить ихъ такъ, чтобъ каждая изъ нихъ была частью знаменателя предыдущей. Для примѣра составимъ еще непрерывную дробь изъ $\frac{47}{93}$; приступимъ къ сему какъ бы къ нахожденію общаго большаго дѣлителя:

$$\frac{93}{}\left|\frac{47}{1}\right|\frac{46}{1}\left|\frac{1}{46}\right|$$

Потомъ составляемъ дроби $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{46}$ и располагаемъ ихъ такъ, чтобъ вторая была частью знаменателя первой, а третья — частью знаменателя второй, именно:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{46}}}.$$

В. И такъ для составленія непрерывной дроби надобно знать только знаменателей частныхъ ея дробей?

От. По етой причинѣ въ нѣкоторыхъ Математическихъ сочиненіяхъ непрерывныя дроби изображаются рядами сихъ знаменателей; такъ: $\frac{95}{161} = (1, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 2)$, $\frac{47}{93} = (1, 1, 46)$.

В. Какимъ же образомъ употребляются непрерывныя дроби для приближеннаго сокращенія дробей?

От. При разложеніи дроби $\frac{95}{161}$ составили сперва $\frac{1}{1+\frac{66}{95}}$; но какъ дробь увеличивается, когда уменьшается ея знаменатель, то оставивши $\frac{66}{95}$, получимъ дробь $\frac{1}{1}$ или 1, которая болѣе данной $\frac{95}{161}$. Потомъ было найдено, что

$$\frac{95}{161} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{29}{66};$$

Ежели въ сей дроби отбросимъ $\frac{29}{66}$, то предыдущая ей $\frac{1}{1}$ увеличится и дробь непрерывная

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

уменьшится и будетъ менѣе данной $\frac{95}{161}$. Посему сія дробь заключается между 1 и $\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{95}{161}$ отъ 1 и отъ $\frac{1}{2}$ разнится менѣе, нежели $\frac{1}{2}$. Далѣе: разложивши $\frac{29}{66}$, нашли

$$\frac{95}{161} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{8}{29};$$

если здѣсь оставимъ $\frac{8}{29}$, то третія дробь $\frac{1}{2}$ увеличится, вторая $\frac{1}{1}$ уменьшится, а потому вся дробь непрерывная

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}$$

сдѣлается болѣе данной. Но если изъ

$$\frac{95}{161} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{8}$$

оставимъ $\frac{5}{8}$, то увеличимъ $\frac{1}{3}$, уменьшимъ $\frac{1}{2}$, увеличимъ $\frac{1}{1}$, и потому вся взятая непрерывая дробь

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}} = \frac{10}{17}$$

будетъ менѣе данной. Такимъ образомъ находимъ, что $\frac{95}{161}$ заключается между $\frac{3}{5}$ и $\frac{10}{17}$; разность сихъ дробей есть $\frac{1}{85}$; слѣд. $\frac{95}{161}$ отъ $\frac{3}{5}$ и отъ $\frac{10}{17}$ отличается уже менѣе, нежели $\frac{1}{85}$. Продолжая сіи изысканія, будемъ находить дроби ближе и ближе подходящія къ $\frac{95}{161}$. Притомъ видимъ, что взявши изъ цѣлой непрерывной дроби нечетное число членовъ, получаемъ дробь большую данной; четное же число членовъ дастъ дробь, меньшую данной. Вотъ еще примѣръ

Въ приложеніяхъ Алгебры къ Геометріи будетъ найдено, что если діаметръ = 1, то окружность = 3,1415926 или $\frac{31415926}{10000000}$. Посту-

пивши съ сею дробью по изъясненному, получимъ

$$\frac{3141\,5926}{}\Big|\frac{10000000}{3}\Big|\frac{1415926}{7}\Big|$$

$$\frac{88518}{15}\Big|\frac{88156}{1}\Big|\frac{362}{243}\Big|\frac{190}{}$$

$$\frac{190}{1}\Big|\frac{172}{1}\Big|\frac{18}{9}\Big|\frac{10}{1}\Big|\frac{8}{1}\Big|\frac{2}{4};$$

слѣд.

$$3{,}1415926 =$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{243} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}}.$$

Взявши отсюда 3 и $3 + \frac{1}{7}$, получимъ для первыхъ предѣловъ данной дроби 3 и $\frac{22}{7}$, т. е: 3,1415926 болѣе 3 и менѣе $\frac{22}{7}$; потомъ $\frac{333}{106}$ и $\frac{355}{113}$, изъ коихъ первая дробь менѣе, а вторая болѣе 3,1415926, и пр.

В. Изъ предложенныхъ изслѣдованій не должно ли заключить, что приближенныя изчисленія основываются на изысканіяхъ предѣловъ, между которыми данное или искомое число заключается?

От. Точно такъ; притомъ замѣтимъ, что чѣмъ сіи предѣлы ближе одинъ къ другому, тѣмъ точнѣйшую величину получаемъ для желаемаго вывода. Но можно обойтись безъ предѣловъ и находить прямо разности между точнымъ и приближеннымъ числомъ: сего рода вычисленія съ величайшею удобностью производятся посредствомъ десятичныхъ дробей. Положимъ, что требуется найти десятичную дробь, равную $\frac{5}{7}$. Ежели раздѣлимъ 5 на 7, то въ частномъ числѣ получимъ именно $\frac{5}{7}$; но если раздѣлимъ 50 на 7, то частное будетъ $7\frac{1}{7}$, которое противъ $\frac{5}{7}$ въ 10 разъ болѣе, поелику оно будучи помножено на 7, даетъ 50, число въ 10 разъ боль-

шее 5; слѣд. $\frac{5}{7} = 0,7 + \frac{1}{70}$. Изъ сего видимъ, что 0,7 противъ $\frac{5}{7}$ менѣе дробью $\frac{1}{70}$. Далѣе раздѣливши 500 на 7, получимъ въ частномъ $71\frac{3}{7}$, которое болѣе $\frac{5}{7}$ уже во 100 разъ; и потому $\frac{5}{7} = 0,71 + \frac{3}{700}$, т. е. 0,71 противъ $\frac{5}{7}$ менѣе уже дробью $\frac{3}{700}$. Продолжая таковыя дѣленія, будемъ находить десятичныя дроби, болѣе и болѣе приближающіяся къ данной дроби.

В. Гдѣ же должно останавливаться въ таковыхъ приближеніяхъ?

От. Ето зависитъ отъ свойства вопроса. Если бы $\frac{5}{7}$ выражала пять седьмыхъ долей вершка, то 0,71 можно уже принимать за точное число: ибо $\frac{3}{700}$ вершка не могутъ сдѣлать значительной погрѣшности.

В. И такъ превращеніе дробей въ приближенныя десятичныя производится чрезъ дѣленіе на зна-

менатель числителя, увеличеннаго въ 10, 100, 1000, . . . разъ, смотря по тому, въ какихъ доляхъ должна быть выражена пренебрегаемая разность?

От. Точно такъ; отсюда само собою выходитъ слѣдующее правило: поелику при дѣленіи, производимомъ для превращенія дробей въ десятичныя, остатки должны быть менѣе дѣлителя, т. е. знаменателя данной дроби; слѣд. при продолженіи дѣленія до тѣхъ поръ, пока въ остаткахъ выйдутъ всѣ числа меньшія онаго знаменателя, новый остатокъ долженъ быть уже одинъ изъ предыдущихъ; а посему частное число возобновится съ одной изъ найденныхъ цыфръ: такимъ образомъ получится десятичная дробь *періодическая.* Для $\frac{5}{7}$ можемъ получить только шесть разныхъ остатковъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6; продолжаемъ же начатое превращеніе сей дроби:

5000000000 : 7 = 7142857. . . .

```
 49
 ——
  10
   7
  ——
   30
   28
   ——
    20
    14
    ——
     60
     56
     ——
      40
      35
      ——
       50
       49
       ——
        10
      и пр:
```

Шестой остатокъ обращаетъ дѣйствіе къ началу; и такъ $\frac{5}{7}$ превращается въ слѣдующую періодическую дробь:

0,714285714285714285 . . . .

Вотъ еще примѣры:

$\frac{5}{11} = 0,454545 \ldots$

$\frac{1}{9} = 0,111111 \ldots$

$\frac{1}{99} = 0,01010101 \ldots$

$\frac{1}{999} = 0,001001001001 \ldots$

$\frac{1}{9999} = 0,000100010001 \ldots$

В. Всѣ ли дроби могутъ быть превращены въ періодическія?

От. Всѣ, кромѣ тѣхъ, которыя превращаются въ точныя десятичныя дроби.

В. По какому признаку можемъ отличить сіи дроби отъ тѣхъ, которыя нельзя выражать десятичными дробями съ точностью?

От. Знаменатели десятичныхъ дробей суть единицы съ нулями, слѣд. составляются изъ взаимнаго перемноженія десятковъ: . . . . . . $100 = 10 . 10$, $1000 = 10 . 10 . 10$, и пр. Посему ежели знаменатель данной дроби будетъ произведеніе однихъ чиселъ 2 и 5, которыя можно превращать въ десятки чрезъ

умноженіе или на 5 или на 2; то сія дробь выражается точною десятичною, которую получить нетрудно: стоитъ только помножать ея числитель и знаменатель на 2 или на 5 до тѣхъ поръ, пока всѣ производители знаменателя сдѣлаются десятками. Вотъ примѣръ: $\frac{7}{20} = \frac{7}{2.10}$, и потому помноживши числитель и знаменатель сей дроби на 5, найдемъ $\frac{35}{10.10} = 0{,}35$;

также $\frac{3}{8} = \frac{3}{2.2.2} = \frac{3.5.5.5}{10.10.10} = 0{,}375$,

еще $\frac{1}{25} = \frac{1}{5.5} = \frac{1.2.2}{10.10} = 0{,}04$ и пр.

Но $\frac{8}{15} = \frac{8}{3.5}$ не можно превратить въ десятичную точную, потому что 3 нельзя сдѣлать десяткомъ.

В. Можно ли находить приближенныя десятичныя дроби, не обращая вниманія на ихъ разности съ

данными дробями, но назначая для сихъ послѣднихъ надлежащіе предѣлы, какъ при сокращеніи дробей посредствомъ непрерывныхъ?

От. Можно. Пусть требуется найти десятичную дробь, которая отъ $\frac{5}{13}$ отличалась бы менѣе, нежели одною тысячною долею: разсмотрѣвши прилежнѣе смыслъ вопроса, находимъ, что данная дробь $\frac{5}{13}$ должна заключаться между двумя десятичными, которыхъ разность была бы ровно тысячная доля; слѣд. сіи дроби составлены изъ тысячныхъ частей единицы; а какъ мы не знаемъ ихъ числителей, то изобразимъ ихъ чрезъ $\frac{x}{1000}$, $\frac{x+1}{1000}$, и по упомянутому замѣчанію надобно, чтобъ $\frac{x}{1000}$ была менѣе $\frac{5}{13}$, $\frac{5}{13}$ менѣе $\frac{x+1}{1000}$. Ежели увеличимъ сіи дроби въ 1000 разъ, то ихъ отношеніе не перемѣнится, т. е. будетъ

$$\frac{x}{1000} \cdot 1000 \text{ менѣе } \frac{5000}{13}, \text{ и } \frac{5000}{13}$$

менѣе $\frac{x+1}{1000} \cdot 1000$

или (стр. 65)

x менѣе $\frac{5000}{13}$, и $\frac{5000}{13}$ менѣе $x+1$.
Но (стр. 68) $\frac{5000}{13} = 384\frac{8}{13}$, т. е. $\frac{5000}{13}$ менѣе 385 и болѣе 384; слѣд. x должно принять за 384, а $x+1$ за 385, и потому $\frac{5}{13}$ содержится между 0,385 и 0,384, и отъ каждой изъ сихъ дробей отличается менѣе, нежели тысячною долею. И такъ вопросъ нашъ принимаетъ два рѣшенія: можемъ употреблять то или другое по произволу.

В. Какимъ образомъ выразить сіе изслѣдованіе общимъ правиломъ?

От. Ежели назначена разность между десятичными дробями, которыя должны содержать данную дробь, то помножь ея числитель на знаменатель оной разности и произведеніе раздѣли на

знаменатель превращаемой дроби: въ частномъ выйдетъ числитель меньшой изъ искомыхъ десятичныхъ дробей. Такъ чтобъ $\frac{8}{11}$ превратить въ десятичную дробь, которая бы отъ $\frac{8}{11}$ отличалась менѣе, нежели $\frac{1}{10000}$, помножаю 8 на 10000 и произведенiе 80000 дѣлю на 11; получивши частное 7272, заключаю, что $\frac{8}{11} = 0{,}7272\ldots$

В. Но что должно дѣлать для разрѣшенiя обратнаго вопроса, т. е. для опредѣленiя дроби, изъ коей составилась данная перiодическая дробь, на пр 0,7272. . . ?

От. Выше видѣли, что $\frac{1}{99} = 0{,}010101\ldots$; ежели помножимъ 0,010101. . . на 72, то получимъ данную перiодическую дробь; слѣд. $0{,}7272\ldots = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$. Также для дроби 0,723723. . . беру $\frac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots$ и помножаю на перiодъ 723; нахожу $\frac{723}{999} = 0{,}723723\ldots$

В. Посему *всякая перiодическая дробь должна составляться изъ*

дроби, коей числитель есть періодъ, а знаменатель число, содержащее столько разъ цыфру 9, сколько цыфръ въ періодѣ?

От. Точно такъ; должно только замѣтить, что сіе правило посредствомъ Алгебры выводится гораздо прямѣе и очевиднѣе.

В. Но если періоды начинаются не съ самой запятой; на пр. если дана будетъ дробь 0,58333..,?

От. Тогда должно запятую перенести къ періоду, такъ: 58,333, и потомъ превративши сію дробь въ $58\frac{3}{9}$, должно $58\frac{3}{9}$ или $58\frac{1}{3}$ раздѣлить на 100: выйдетъ $0,58 + \frac{1}{300} =$

$$\frac{174+1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12}.$$

В. При извлеченіи квадратныхъ и кубическихъ корней видѣли, что изъ многихъ чиселъ нельзя найти точныхъ корней въ цѣлыхъ числахъ;

посему должно спросить: можно ли выразить ихъ дробями?

От. Нѣтъ. На примѣръ, $\sqrt{8}$ заключается между 2 и 3; слѣд. искомый корень долженъ быть 2 съ дробью или вообще дробь; пусть сія дробь будетъ $\frac{15}{7}$; тогда $(\frac{15}{7})^2 = \frac{15.15}{7 \cdot 7} = 8$. Но если $\frac{15}{7}$ не превращается въ цѣлое число, то не превратится въ оное и $\frac{15.15}{7 \cdot 7}$, поелику произведеніе дѣлится безъ остатка токмо въ томъ случаѣ, когда дѣлится такимъ образомъ хотя одинъ изъ его производителей (стр. 55): а когда $\frac{15.15}{7 \cdot 7}$ не можетъ равняться никакому цѣлому числу, тогда и $\frac{15}{7}$ не можетъ быть квадратнымъ корнемъ изъ 8. Что сказано о $\frac{15}{7}$, тоже должно сказать о каждой дроби, содержащейся между 2 и 3.

В. И такъ при вычисленіяхъ должно довольствоваться не точными, но приближенными корнями?

От. И способъ ихъ опредѣленія основывается на тѣхъ же началахъ, посредствомъ которыхъ превращаются дроби въ десятичныя приближенныя. Разсмотримъ $\sqrt{8}$: поелику $8 = 2.2.2 = 2^2.2$, слѣд. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; также $\sqrt{45} = \sqrt{3^2.5} = 3\sqrt{5}$. Изъ сихъ и подобныхъ примѣровъ должно заключить, что *когда надобно помножить корень, тогда можно помножать квадратъ, но уже на квадратъ множителя* Такимъ образомъ $5\sqrt{7} = \sqrt{7.25} = \sqrt{175}$, $10\sqrt{7} = \sqrt{700}$, и пр.

В. Къ чему служитъ сіе правило?

От. Вотъ его употребленіе. Ежели требуется извлечь квадратный корень изъ 5, то видимъ, что онъ заключается между 2 и 3; когда по-

множимъ 5 на 100, и извлечемъ из 500 корень 22, тогда по объясненному правилу надобно уменьшить его въ десять разъ: отъ сего получимъ

$$500 = (22)^2 + 16$$

и

$$5 = \frac{(22)^2}{100} + 0{,}16 = (2{,}2)^2 + 0{,}16;$$

слѣд. 2,2 уже ближе къ истинному корню, нежели 2: ибо квадратъ отъ 2 съ цѣлой единицей составляетъ 5. Потомъ

$$50000 = (223)^2 + 271$$

и

$$5 = (2{,}23)^2 + 0{,}0271;$$

$$5000000 = (2236)^2 + 304,$$

и

$$5 = (2{,}236)^2 + 0{,}000304,$$

и пр.

Такимъ образомъ видимъ, что болѣе и болѣе приближаемся къ истинному корню изъ 5. Вотъ еще примѣры:

$\sqrt{2} = 1,4142$, и $2 = (1,4142)^2 + 0,00003836$;

$$\sqrt{0,6} = \frac{\sqrt{60}}{10} = 0,7746,$$

$$\sqrt{26,720034} = \frac{\sqrt{26720034}}{1000} = 5,169142.$$

Для разрѣшенія двухъ послѣднихъ вопросовъ надобно принять въ помощь правило, изъясненное на стр. 115.

В. Можно ли и здѣсь употребить предѣлы?

От. Не только можно, но и должно; ибо посредствомъ ихъ приближенное извлеченіе корней получаетъ большую ясность. Положимъ, что при извлеченіи $\sqrt{26720034}$ надобно довольствоваться такимъ числомъ, которое отъ искомаго корня отличалось бы менѣе, нежели тысячною долею: отсюда очевидно, что сей корень должно заключить между двумя дробями, которыя имѣли бы

разностью тысячную долю. Такъ, чтобъ было

$$\frac{x}{1000} \text{ менѣе } \sqrt{26720034} \text{ менѣе } \frac{x+1}{1000}$$

или

$$x \text{ менѣе } 1000\sqrt{26720034} \text{ менѣе } x+1,$$

или

$$x \text{ менѣе } \sqrt{26720034000000} \text{ менѣе } x+1,$$

но какъ $\sqrt{26720034000000}$ будетъ содержаться между 5169142 и . . . 5169143, то изъ искомыхъ числителей $x=5169142$, $x+1=5169143$, и посему требуемое число будетъ или 5169,142 или 5169,143, какъ и было найдено.

В. Прилагается ли сей способъ къ извлеченію кубическихъ корней?

От. Съ той только перемѣною, что умноженіе кубическаго корня замѣняется умноженіемъ куба на

кубъ множителя; такъ $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3.3.3.5} = 3\sqrt[3]{5}$. Посему ежели потребуется найти число, которое отъ $\sqrt[3]{5}$ отличалось бы менѣе, нежели сотою долею, то должно составить

$$\frac{x}{100} \text{ менѣе } \sqrt[3]{5} \text{ менѣе } \frac{x+1}{100},$$

или

$$x \text{ менѣе } 100\sqrt[3]{5} \text{ менѣе } x+1,$$

$$x \text{ менѣе } \sqrt[3]{5000000} \text{ менѣе } x+1.$$

Но $\sqrt[3]{5000000} = 170$

```
 1
————
 4000
 21
 147
  343
 ————
 3913
 ————
   87000
```

т. е. $\sqrt[3]{5000000}$ содержится между 170 и 171, слѣд. $\sqrt[3]{5} = 1{,}70$ или $1{,}71$.

В. Не можно ли прибавить еще какихъ нибудь замѣчаній?

От. Вопервыхъ замѣтимъ, что неточные квадратные и кубическіе корни называются числами *ирраціональными* или *несоизмѣримыми съ единицею*, потому что ихъ нельзя выражать ни повтореніями цѣлой единицы, ни повтореніями ея долей. Потомъ прибавимъ, что если таковыя числа встрѣчаются въ срединѣ выкладки, то нѣтъ надобности находить къ нимъ прближенныя: ибо весьма часто къ концу вычисленія числа сіи или совершенно уничтожаются, или превращаются въ *раціональныя.* Такъ

$5\sqrt{2} + 0{,}98 - 3\sqrt{2} - 0{,}73 - 2\sqrt{2} = 0{,}25$

$$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{4} = 12,$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\sqrt[3]{0,5} \times \sqrt[3]{0,25} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5.$$

$$\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{375}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5.$$

УРОКЪ VIII.

О тройномъ правилѣ.

В. Предложивши всѣ способы вычисленій, должно показать ихъ употребленіе: сперва должно объяснить, въ чемъ состоитъ *тройное правило*?

От. Названіе *тройное* дано сему правилу потому, что всѣ относящіеся къ нему вопросы разрѣшались посредствомъ *пропорцій*, въ которыхъ по тремъ даннымъ членамъ опредѣлялся четвертый; но вообще числительная часть Математики не имѣетъ надобности въ семъ *механическомъ* пособіи; особенно начинающіе должны приучаться къ соображенію условій вопросовъ, и разрѣшать ихъ прямо помощію четырехъ главныхъ дѣйствій Ариѳметики, не употребляя *формулы*, несправедливо называемой *пропорціею.* Къ Геометріи принадлежитъ теорія количествъ пропорціональныхъ; здѣсь постараемся

доказать, что всѣ вопросы тройнаго правила можно разрѣшать безъ упомянутой формулы.

Положимъ, что требуется опредѣлить, во сколько дней 18 человѣкъ окончатъ извѣстную работу, которую 15 чел. окончиваютъ въ 8 дней. Чтобъ числа сего вопроса были *передъ глазами*, расположимъ ихъ въ такомъ порядкѣ:

15 чел. ———— 8 д.

18 чел. ———— x д.

Подъ x разумѣемъ искомое число дней. Потомъ разсуждаемъ: поелику работа одна и таже, прилежаніе и искуство работающихъ предполагаются также одинаковыми; слѣд. для окончанія сей работы въ одинъ день потребно одно и тоже число людей: но ежели по первому условію 15 человѣкъ производятъ ее въ 8 дней, а по второму 18 чел. въ x дн.; то явно, что для одного дня должно употребить или 15.8 или $18.x$ человѣкъ.

Посему 15.8 = 18.x; изъ сего же равенства или *урасненія* видимъ, что по двумъ числамъ 15. 8 и 18 надобно найти такое третіе x, которое, будучи помножено на 18, дало бы 15.8: слѣд. вопросъ превращается въ дѣленіе (стр. 37 и 38), въ которомъ 15.8 будетъ дѣлимое, 18 дѣлитель и x частное; такъ что

$$x = \frac{15.8}{18} = \frac{3.5.4.2}{2.3.3} = \frac{20}{3},$$

т. е. искомое число дней будетъ $6\frac{2}{3}$.

В. Но какъ разрѣшить вопросъ обратный: ежели 15 ч оканчиваютъ извѣстную работу въ 8 д., то сколько понадобится людей, чтобъ кончить ее въ $6\frac{2}{3}$ д.?

От. Изобразивши чрезъ x уже искомое число людей, опять располагаемъ вопросъ подобно предыдущему:

15 чел. ———— 8 д.,
x ———— $6\frac{2}{3}$;

и на основаніи того же самаго разсужденія получаемъ

$$15.8 = x . 6\tfrac{2}{3},$$

отсюда

$$x = 15.8 : 6\tfrac{2}{3} = 15.8 : \tfrac{20}{3}$$

или

$$x = 3 . 2 . 3 = 18.$$

Чтобъ начинающіе могли вникнуть въ сей способъ рѣшенія, предлагаемъ многіе вопросы:

1. За 180 рублей и 52 коп. куплено 23 пуда какого нибудь товара, *спр.* сколько можно купить за 90 р. и 36 коп.?

180, 52 руб. ———— 23 пуда
90, 36 ———— x.

Сперва находимъ, что за *одинъ* рубль можно купить $\frac{23}{180,52}$ или $\frac{2300}{18052}$; послѣ сего явно, что ежели сію дробь помножимъ на 90,36, то удовлетворимъ требованію:

$$x = \tfrac{2300}{18052} \times 90,36 = \tfrac{2300.9036}{1805200}.$$

и

$$x = 11 \text{ пуд. } 20 \text{ ф. } 16{,}3 \text{ лот.}$$

2. Обратно: за 15 руб. куплено 4 пуда: что должно заплатить за 6 пудовъ?

$$15 \text{ руб.} \text{ ——— } 4 \text{ пуд.}$$
$$x \text{ ——— } 6.$$

Посл̂ику одинъ пудъ стоитъ вчетверо меньше 15 руб., или $\frac{15}{4}$ р.; слѣд. 6 пудовъ будутъ стоить

$$x = \frac{15.6}{4} = \frac{15.2.3}{2.2} = \frac{45}{2} = 22{,}5 \text{ р.}$$

3. Шести ескадронамъ достаетъ *фуража* на 54 д. на сколько дней достанетъ тогоже фуража 9 еск.?

$$6 \text{ ес.} \text{ ——— } 54 \text{ д.}$$
$$9 \text{ ——— } x.$$

Сей вопросъ совершенно сходенъ съ предложеннымъ въ началѣ урока, и потому находимъ

$$x = \frac{6.54}{9} = \frac{6.6.9}{9} = 36.$$

4. На кораблѣ запаса только на 10 дней, хотя онъ долженъ пробыть въ морѣ 15 дней: спр. чѣмъ надобно уменьшить *дачу*?

Когдабы корабль пробылъ въ морѣ 10 дней, тогда служители получалибы по цѣлой дачѣ или по 1; слѣд. вопросъ должно представить въ такомъ видѣ:

по 1 для 10 дн.
по x — 15.

Положимъ, что на кораблѣ 50 ч. служителей; въ продолженіи 10-дневнаго плаванія въ каждый день издерживалось бы 50 *дачъ*, а въ 15-дневное количество издерживаемаго запаса ежедневно выразится числомъ $50.x$; слѣд. въ первомъ случаѣ весь запасъ изобразится чрезъ 50.10, а во второмъ чрезъ $15.50.x$, и потому

$$15.50.x = 50.10;$$

отсюда

$$x = \frac{50 . 10}{15 . 50} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

И такъ дачи должны быть уменьшены *одною третью.*—Замѣтимъ, что предположеніе о числѣ служителей сдѣлано для лучшаго объясненія вопроса : можно было бы прямо написать

$$15 . x = 1 . 10 = 10.$$

5. Въ одно водохранилище проведено три фонтана, изъ коихъ первый наполняетъ сіе водохранилище въ 6 часовъ, второй въ $5\frac{1}{4}$ ч., третій въ $4\frac{2}{3}$ ч. ; во сколько времени наполнится водохранилище вдругъ всѣми фонтанами ?

Величину водохранилища изобразимъ чрезъ 1, а искомое время чрезъ x, и станемъ разсуждать :

Ежели первый фонтанъ наполняетъ водохранилище въ 6 часовъ, то въ *одинъ* часъ нальется только *шестая* его доля, и слѣд. $\frac{x}{6}$ въ x часовъ.

Также второй и третій фонтаны въ x часовъ наполнятъ. . . . $\frac{x}{5\frac{1}{4}}$ и $\frac{x}{4\frac{2}{3}}$, или $\frac{4x}{21}$ и $\frac{3x}{14}$ доли водохранилища.

Но сумма всѣхъ сихъ долей должна равняться всему водохранилищу или 1; слѣд.

$$\frac{x}{6} + \frac{4x}{21} + \frac{3x}{14} = 1.$$

Общимъ знаменателемъ сихъ дробей можетъ быть 42, такъ что

$$\frac{7x}{42} + \frac{8x}{42} + \frac{9x}{42} = 1,$$

или

$$\frac{24x}{42} = \frac{4x}{7} = 1.$$

И такъ искомое число x таково, что $\frac{4}{7}$ доли отъ онаго составляютъ 1, т. е. сіе число въ 7 разъ больше и въ 4 раза меньше 1, или

$x = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ ч.

6. Такимъ же образомъ разрѣшается и слѣдующій вопросъ: одинъ писецъ исписываетъ 5 листовъ въ 3 дни, другой—7 листовъ въ 5 дней, и третій — 9 лист. въ 7 дн. *Спр.* Во сколько дней всѣ трое испишутъ 40 лист.?

Изъ условій тотчасъ заключаемъ, что въ *одинъ* день первый писецъ напишетъ $\frac{5}{3}$ *л*, второй — $\frac{7}{5}$ *л*., третій — $\frac{9}{7}$ *л*.; есели положимъ, что всѣ трое пропишутъ x дней, чтобъ кончить 40 лист.; то найдемъ, что въ сто время первый напишетъ $\frac{5x}{3}$, второй $\frac{7x}{5}$, третій $\frac{9x}{7}$. Отсюда получаемъ

$$\frac{5x}{3} + \frac{7x}{5} + \frac{9x}{7} = 40.$$

Приведши дроби къ одному знаменателю 105 и сложивши ихъ, составимъ

$$\frac{457}{105}x = 40,$$

т. е. искомое число во 105 разъ больше и въ 457 разъ меньше 40; слѣд. оно будетъ $\frac{40 \cdot 105}{457} = 9\frac{87}{457}$.

7. Ежели 50 лив. Парижскихъ равняются 51 лив. Гамбургскому, и 25 лив. Гамбурскихъ составляютъ 24 л. Франкфуртскихъ, то требуется опредѣлить Парижскій ливръ посредствомъ Франкфуртскаго?

Условія вопроса напишемъ такъ:

$$50\,П. = 51\,Г.,\ 25\,Г. = 24\,Ф.$$

Изъ перваго уравненія видимъ, что Парижскій ливръ составится изъ Гамбурскаго, когда 50ая доля сего послѣдняго повторится 51 разъ, или $П = \frac{51}{50}Г.$; также изъ втораго уравненія получимъ $Г. = \frac{24}{25}$ Ф. Отсюда

$$П = \frac{51}{50} \cdot \frac{24}{25} Ф. = \frac{612}{625} Ф.$$

8. Выразить Французскій *метръ* посредствомъ Русскаго аршина?

Замѣтимъ: 15 фут. Пар. = 16 ф. Лонд., т. е. ф. Пар. = $\frac{16}{15}$ ф. Лонд.; саж. Р. = 7 ф. Л, или 1 ф. Л. = $\frac{1}{7}$ с. Р, и потому ф. Пар. = $\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{7}$ с Р = $\frac{16.3}{15.7}$ ар. = $\frac{16}{35}$ ар. Но метръ = ... 3,0784440 ф. П.; слѣд.

$$метръ = \frac{16.3,0784440}{35} \text{ ар.} = 1,407 \text{ ар.}$$

В. Ежели въ задачахъ, относящихся къ тройному правилу, даны будутъ не три; но пять, семь и пр. количествъ и потребуется опредѣлить шестое, осьмое, и пр.; то какимъ образомъ поступаютъ въ сихъ случаяхъ?

От. Сперва должно перемѣнить вопросъ такъ, чтобъ вмѣсто шести, осьми, и пр. количествъ содержалось въ немъ только четыре. Пусть требуется опредѣлить число саженъ, вырываемыхъ 8 работниками въ 2 дни, если 5 ра-

кихъ же работниковъ могутъ вырыть 150 саж въ 3 дни? Располагаемъ сей вопросъ въ такомъ видѣ:

5 р. —— 3 д. —— 150 саж.

8 —— 2 —— x

и потомъ спрашиваемъ: ежели 5 раб. въ 3 д. вырываютъ 150 саж., то сколько надобно употребить людей, чтобъ тѣже 150 саж. вырыли они въ 1 день? Ясно, что втрое болѣе или 15 человѣкъ. Также найдемъ, что для вырытія x саж. въ одинъ день потребуется 16 чел. Послѣ сего новый вопросъ: ежели 15 ч. вырываютъ 150 саж., то сколько 1 чел.? Разумѣется, что въ 15 разъ меньше или $\frac{150}{15}$ или 10 саж., но когда 1 чел. вырываетъ 10 саж., то 16 чел. 160 саж. Вотъ наконецъ искомое число.

Для упражненія начинающихъ и на сіе правило предложимъ нѣсколько примѣровъ.

1. Нѣкто въ 5 дней, находясь въ дорогѣ по 8 часовъ въ день, проѣхалъ 120 верстъ; *спр.* сколько верстъ проѣдитъ онъ въ 15 дней, находясь въ дорогѣ по 6 часовъ въ день?

И такъ

5 д. —— 8 ч. —— 120 в.
15 —— 6 —— x;

и разсуждаемъ: если бы путешественникъ въ каждый день находился въ дорогѣ по 1 часу, то 120 в. проѣхалъ бы онъ въ 5.8 д., а x вер. въ 15.6 д., или

5.8 д. —— 120 в.
15.6 —— x,

слѣд. въ каждый день проѣзжалъ бы онъ $\frac{120}{5.8}$, а въ 15.6 д. окончилъ бы $\frac{120}{5.8} \times 15.6$, т. е.

$$x = \frac{120.15.6}{5.8} = \frac{3.5.2.2.2.3.5.2.3}{5.8} =$$

3.3.5.2.3,

или

$$x = 270.$$

2. Ежели путешественникъ проѣдетъ 120 вер. въ 5 дней, употребляя въ день 8 часовъ; то сколько часовъ въ день долженъ онъ находиться въ дорогѣ, чтобъ проѣхать 270 вер. въ 15 дней?
И такъ

5 д. — 8 ч. — 120 в.

15 —— x — 270.

Разсуждая сходно съ предыдущимъ, приводимъ сей вопросъ въ такой видъ:

5.8 д. — 120 в.

15 . x — 270.

Потомъ: ежели въ 5.8 дней или часовъ (поелику въ каждый день будетъ онъ находиться въ дорогѣ 1 часъ) проѣхалъ путешественникъ 120 вер., то для одной версты понадобится употребить во 120 разъ менѣе вре-

мени или $\frac{5.8}{120}$ час., и слѣд. 270 вер. окончитъ въ $\frac{5.8}{120} \times 270$, т. е.

$$15.x = \frac{5.8.270}{120}.$$

Отсюда, основываясь на смыслѣ дѣленія и на свойствахъ дробей, выводимъ

$$x = \frac{5.8.270}{120.15} = 6 \text{ час.}$$

3. Въ 42 дни, работая въ день по 8,5 час., 15 чел. соткали сукна 250,6 ар.; *спр.* сколько часовъ въ день должны работать 30 челов., чтобъ въ 21 д. могли соткать 125,3 ар. И такъ

15 чел. — 42 д. — 8,5 ч. — 250,6 ар.

30 — 21 — x — 125,3. —

Изъ сего находимъ, что 250,6 ар. *одинъ* человѣкъ кончитъ въ 15.42.8,5

час., а 125,3 ар. въ 30.21.x час., или

$$15.42.8,5 \text{ час.} — 250,6 \text{ ар.}$$

$$30.21.x — 125,3.$$

Но какъ *одинъ* аршинъ должно соткать въ $\frac{15.42.8,5}{250,6}$ час., то для 125,3 ар. должно употребить . . . . $\frac{15.42.8,5}{250,6} \times 125,3$ час., или

$$30.21.x = \frac{15.42.8,5.125,3}{250,6}.$$

Отсюда, опять основываясь на смыслѣ дѣленія и на свойствахъ дробей, выводимъ

$$x = \frac{15.42.8,5.125,3}{250,6.30.21},$$

или

$$x = 4,25 \text{ час.}$$

4. Въ 42 дни, работая въ день по 8,5 час., 15 чел. соткали сукна

250,6 ар., *спр.* сколько человѣкъ надобно употребить для сотканія 125,3 ар., когда проработаютъ они 21 день и въ каждый день 4,25?

И такъ

15 чел. — 42 д.—8,5 ч.—250,6 ар.

x — 21 — 4,25 — 125,3.

Потомъ находимъ, что 250,6 ар. въ *одинъ* часъ соткутъ 15 . 42 . 8,5 чел., а 125,3 ар. — 21. 4,25. x человѣкъ, или

15.42.8,5 чел. —— 250,6 ар.

21 . 4,25 . x —— 125,3.

Но какъ *для одного* аршина должно будетъ употребить только . . . . $\frac{15.42.8,5}{250,6}$ ч.; то для 125,3 ар.

понадобится $\frac{15.42.8,5}{250,6} \times 125,3$ чел.

или

$$21.\ 4{,}25.x = \frac{15.42.8{,}5.125{,}3}{250{,}6}.$$

Отсюда

$$x = \frac{15.42.8{,}5.125{,}3}{250{,}6.21.4{,}25},$$

или

x = 30 чел.

В. Сихъ примѣровъ достаточно для увѣренія, что всѣ возможные вопросы, относящіеся къ тройному правилу, можно разрѣшать безъ помощи пропорцій : но есть ли возможность обойтись безъ нихъ въ правилѣ товарищества?

От. Есть : и притомъ рѣшенія принадлежащихъ сюда вопросовъ становятся гораздо простѣе. Вотъ примѣры :

1. Положимъ, что изъ трехъ купцовъ первый положилъ для торга 150 руб., второй 250 р., третій 350, и получили прибыли 200 руб. *спр.* сколько каждый изъ нихъ долженъ взять изъ сей прибыли?

Опять, для удобнѣйшаго обозрѣнія вопроса, расположимъ его въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} 1, \ldots 150 \text{ р.} \\ 2, \ldots 250 \\ 3, \ldots 350 \end{array}\right\} 200 \text{ руб.}$$

Потомъ сдѣлаемъ предположеніе, что четвертый купецъ положилъ для торга только 1 рубль: тогда его доля была бы

въ 150 разъ меньше доли перваго,
250 ——————— втораго,
350 ——————— третьяго;

и если изобразимъ сію долю чрезъ x, то

первый получитъ $150\,x$,
второй ——— $250\,x$,
третій ——— $350\,x$.

Сумма сихъ долей должна равняться 200 руб.; слѣд.

$$750\,x = 200,$$

и по смыслу дѣленія

$$x = \frac{200}{750} = \frac{4}{15} \text{ руб.}$$

Послѣ сего, помножая $\frac{4}{15}$ на 150, 250, 350, найдемъ, что

первый купецъ получитъ $\dfrac{150.4}{15}$

или 40 руб.

второй —— ——— $\dfrac{250.4}{15}$

или $66\frac{2}{3}$

третій —— ——— $\dfrac{350.4}{15}$

или $93\frac{1}{3}$

какъ и должно быть: ибо $40 + 66\frac{2}{3} + 93\frac{1}{3} = 200$.

2. Одинъ купецъ положилъ въ торгъ 75 руб. на 3 мѣсяца, другой 25 руб. на 5 мѣс., третій 15 руб. на 10 мѣсяцовъ; получили прибыли 80 руб. *Спр.* какъ должно раздѣлить сію прибыль?

Сперва надобно положенные капиталы помножить на соотвѣтству-

ющія числа мѣсяцовъ: произведенія будутъ тѣ капиталы, которые надлежало бы положить на одинъ мѣсяцъ, чтобъ приторговать также 80 руб. прибыли. И такъ собственно

1	купецъ	положилъ	225 р.	80 руб.
2	——	———	125	
3	——	———	150	

Послѣ сего надлежитъ разсуждать совершенно сходно съ предыдущемъ и для предполагаемой доли четвертаго купца найдемъ

$$x = \frac{80}{225+125+150} = \frac{80}{500} = 0,16.$$

Посему первый купецъ получитъ 36 руб., второй 20 руб.. третій 24 руб.: всѣ сіи доли составляютъ 80 руб.

УРОКЪ IX.

О прогрессiяхъ.

В. Числа въ естественномъ порядкѣ составляются чрезъ приложенiе *единицы*: но если будемъ прикладывать какое нибудь другое число; то не получимъ ли замѣчательныхъ свойствъ и общихъ правилъ для рѣшенiя вопросовъ, которые можно сдѣлать при семъ способѣ составленiя чиселъ?

От. Прежде всего замѣтимъ, что рядъ чиселъ, составленный изъ даннаго числа чрезъ приложенiе также одного какого нибудь числа, называется *прогрессiею Ариѳметическою*, первоначальное данное число — *первымъ членомъ*, а постоянно придаваемое — *разностью*. Такъ ряды

1, 2, 3, 4, 5, ...

7, 10, 13, 16, 19, . .

суть Ариѳметическія прогрессіи, въ которыхъ первые члены 1 и 7, разности 1 и 3.

Теперь, чтобъ открыть общее правило для нахожденія каждаго члена Ар. прогрессіи, представимъ вторую въ такомъ видѣ:

$$7, 7+3, 7+3+3, 7+3+3+3,$$
$$7+3+3+3+3, 7+3+3+3+3+3,$$

или

$$7, 7+3, 7+2.3, 7+3.3, 7+4.3, \ldots$$

Разсмотрѣвши послѣдній рядъ, должно заключить, что

второй членъ есть сумма перваго съ разностью,

третій членъ есть сумма перваго съ *удвоенною* разностью,

четвертый членъ есть сумма перваго съ *утроенною* разностью,

пятый членъ есть сумма перваго съ *учетверенною* разностью,

И такъ вообще: *каждый членъ Ариѳметической прогрессіи най-*

дется, когда къ первому члену придана будетъ разность, помноженная на число членовъ до искомаго. Ежели ищется 10ый членъ, то разность должно помножить на 9, для 17го члена помножается оная на 16; и пр.

В. И такъ, если разность будетъ 2, первый членъ 9; то 15ый членъ выйдетъ 37?

От. Точно такъ. Также 100ый членъ Ариѳ прогрессіи, начинающейся съ 0,5 и имѣющей разностью 0,7, будетъ 69,8.

В. Ежели извѣстны всѣ члены Ар. прогрессіи, то для опредѣленія ихъ суммы стоитъ только сложить сіи члены: но когда даны будутъ только *первый членъ, разность и число членовъ*, тогда какимъ образомъ опредѣляется *сумма* Ар. прогрессіи?

От. Возьмемъ для примѣра Ар. прогрессію

$3, 3+2, 3+2.2; 3+3.2; 3+4.2, 3+5.2.$

напишемъ ее въ обратномъ порядкѣ:

$3+5.2, 3+4.2, 3+3.2, 3+2.2, 3+2, 3;$

сложивши сіи два ряда и члены найденной суммы, получимъ удвоенную сумму данной прогрессіи:

$$2C. = (3+3+5.2)+(3+3+4.2+2)+(3+3+3.2+2.2)+(3+3+3.2+2.2)+(3+3+2+4.2)+(3+3+5.2),$$

или

$$2C = (3+3+5.2)+(3+3+5.2)+(3+3+5.2)+(3+3+5.2)+(3+3+5.2)+(3+3+5.2),$$

или

$$2C = (3+3+5.2) \times 6,$$

слѣд. *одна* сумма, или

$$C = \frac{(3+3+5.2) \times 6}{2}.$$

Но какъ 3 есть первый членъ данной прогрессіи, $3+5.2$ послѣдній, 6 чи-

сло членовъ; то *для опредѣленія суммы Ариѳметической прогрессіи должно найти сперва послѣдній членъ, потомъ сложить его съ даннымъ первымъ, сумму помножить на число членовъ, и наконецъ вышедшее произведеніе раздѣлить пополамъ.*

В. Какіе вопросы можно разрѣшать посредствомъ объясненныхъ правилъ?

От. Для упражненія разрѣшимъ слѣдующіе:

1. Въ подковахъ лошади находится 50 гвоздей, и лошадь сію продаютъ съ тѣмъ условіемъ, чтобъ за первый гвоздь было заплачено 10 руб., за второй 15, и т. д. *спраш.* какъ велика цѣна лошади?

Смыслъ вопроса показываетъ; что надобно опредѣлить сумму Ариѳ. прогрессіи, въ которой первый членъ есть 10, разность 5, число членовъ

50: слѣд. для послѣдняго члена получимъ $10 + 5.49 = 255$, потомъ уже искомая сумма будетъ $= \frac{(10+255).50}{2}$ $= 6625$. И такъ цѣна лошади есть 6625 руб.

2, Опытъ научаетъ, что свободно падающее тѣло въ первую секунду паденія пролетаетъ 15 ф., во вторую 15×3, въ третью 15×5, въ четвертую 15×7, и пр.: *спр.* съ какой высоты упадетъ оно въ $10''$?

Опять должно опредѣлить сумму Ар. прогрессіи, въ которой первый членъ $= 15$, число членовъ $= 10$, разность 15.2; ибо $15 \times 3 = 15 + 15.2$, $15 \times 5 = 15 \times 3 + 15 \times 2$, и т. д. Посему для послѣдняго члена получимъ $15 + 30.9 = 285$ и потому искомая сумма или высота будетъ $=$ $\frac{(15 + 285).10}{2} = 1500$ фут.

3, Найти сумму 15 натуральныхъ чиселъ?

Н симъ вопросомъ требуется опредѣлить сумму Ар прогр., коей первый членъ и разность = 1, а послѣдній членъ и число членовъ = 15; слѣд. сумма будетъ $=\frac{(1+15).15}{2}=120.$

Остановимся на семъ вопросѣ, и взявши рядъ натуральныхъ чиселъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

составимъ суммы двухъ, трехъ, четырехъ, и т. д. членовъ:

3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...

Сіи числа имѣютъ то достопримѣчательное свойство, что могутъ быть выражаемы точками, расположенными въ видѣ *треугольниковъ*, имѣющихъ въ каждой сторонѣ столько точекъ, сколько взято чиселъ изъ ряда натуральныхъ. Такъ

3 6 15 66

В. Употребляется ли сіе свойство для рѣшенія полезныхъ вопросовъ?

От. Пушечныя ядра и бомбы располагаются *пирамидами*, составляемыми изъ треугольныхъ слоевъ: ежели сосчитаемъ бомбы или ядры въ сторонѣ самаго нижняго слоя, то не разбирая пирамиды, можемъ опредѣлить число всѣхъ бомбъ или ядеръ. Положимъ, что въ оной сторонѣ содержится 11 ядеръ; тогда

Въ первомъ слоѣ снизу будетъ (стр. 183)

содерж. $\frac{(1+11).11}{2}=66$

— второмъ — — — $\frac{(1+10).10}{2}=55$

— третьемъ — — — $\frac{(1+9).9}{2}=45$

— четвертомъ — — $\frac{(1+8).8}{2}=36$

— пятомъ — — — — $\frac{(1+7).7}{2}=28$

— шестомъ — — — $\frac{(1+6).6}{2}=21$

— седьмомъ — — — $\frac{(1+5).5}{2}=15$

— осьмомъ — — — $\frac{(1+4).4}{2}=10$

— девятомъ — — — $\frac{(1+3).3}{2}=6$

— десятомъ — — — $\frac{(1+2).2}{2} = 3$

— одиннадцатомъ —— $\frac{(1+1).1}{2} = 1$

И того 286 яд.

В. Но если имѣемъ Ариѳ. прогрессію

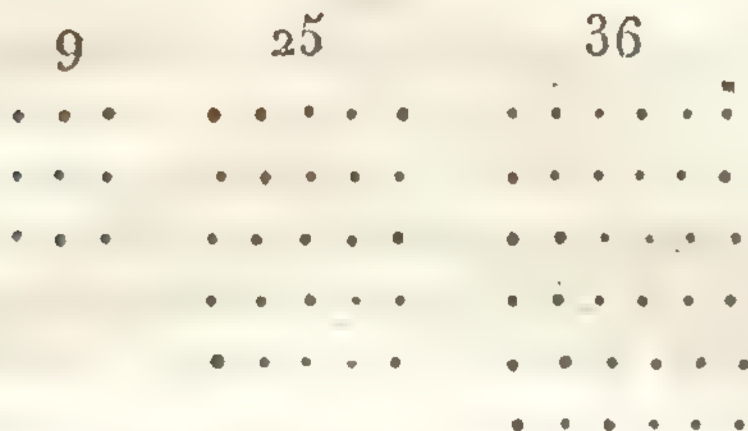
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

въ которой первый членъ 1, а разность 2, то въ суммахъ ея членовъ не замѣчаютъ ли подобнаго же свойства?

От. Суммы членовъ сей прогрессіи будутъ

4, 9, 16, 25, 36, . . .

числа, которыя можно выражать точками, располагаемыми въ видѣ *квадратовъ*, имѣющихъ въ сторонѣ столько точекъ, сколько взято членовъ изъ оной прогрессіи. Такъ



В. Полезны ли сіи числа?

От. Также иногда ядры располагаются кучами, состоящими изъ квадратныхъ слоевъ. Для вычисленія такой кучи должно сосчитать число ядеръ въ сторонѣ одного слоя, возвысить сіе число въ квадратъ который помножается уже на число слоевъ. Такъ ежели въ сторонѣ каждаго слоя будетъ 6 ядеръ, то въ 7 таковыхъ слояхъ найдется $36 \cdot 7 = 252$ ядеръ. Нетрудно также вычислить кучу *квадрато - пирамидальную.*

В. Найти число членовъ прогрессіи, въ которой первый чл. $= 2$, послѣд. $= 6$, разность $= 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$?

От. Видѣли, что послѣдній членъ равняется первому съ раз-

ностью, помножаемою на число членовъ до сего послѣдняго; слѣд. умноженная такимъ образомъ разность равняется послѣднему члену безъ перваго, и потому если число членовъ данной прогрессіи, кромѣ перваго, изобразимъ чрезъ x, то составимъ

$$\frac{4}{3}x = 6 - 2 = 4,$$

т. е. x будетъ *втрое* больше и *вчетверо* меньше числа 4 или $\frac{4.3}{4} = 3.$ И такъ искомое число членовъ есть 4.

В. Но если даны будутъ первый членъ, разность, сумма, и потребуется о п р е д ѣ л и т ь послѣдній членъ и число членовъ Ариѳ. прогрессіи; то какимъ образомъ удовлетворить сему вопросу?

От. Ариѳметическія средства недостаточны для рѣшенія такого вопроса; онъ весьма простъ для Алгебры; тамъ повторимъ его и разрѣшимъ безъ малѣйшаго затрудненія. И такъ уже разрѣшено здѣсь много во-

просовъ, помѣщаемыхъ обыкновенно въ Алгебрѣ; мы сдѣлали сіе по двумъ причинамъ: вопервыхъ всѣ сіи вопросы, подобно сей-часъ разрѣшенному, весьма просты; вовторыхъ, желали, чтобъ учащіеся совершенно поняли необходимость и превосходство Алгебраическихъ способовъ предъ Ариѳметическими.

В. Можно ли между членами данной прогрессіи вставлять другіе члены, которые бы съ первыми составили новую прогрессію?

От. Можно. Возьмемъ для примѣра натуральную прогрессію

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .

и размысливши, что членъ, содержащійся между 4 и 5, будетъ болѣе 4хъ тою разностью, которою онъ менѣе 5ти, найдемъ, что

ср. чл. = 4 + *раз.*

и *ср. чл.* = 5 — *раз.*

Отсюда

$$2.\ ср.\ чл. = 9\ ,\ \ ср.\ чл. = 4\tfrac{1}{2},$$

и потому разность членовъ новой Ар. прогрессіи будетъ $\frac{1}{2}$; такъ что

$$1,\ 1\tfrac{1}{2},\ 2,\ 2\tfrac{1}{2},\ 3,\ 3\tfrac{1}{2},\ 4,\ 4\tfrac{1}{2},\ 5,\ 5\tfrac{1}{2},\ 6,\ 6\tfrac{1}{2},\ 7\ldots$$

Еще примѣръ: вставить шесть членовъ между 4 и 32? — Смыслъ сего вопроса показываетъ, что надобно найти разность Ар. прогр., въ которой первый членъ есть 4, послѣдній 32, а число членовъ 8. Но какъ послѣдній членъ будетъ равняться $4 + 7\ раз.$, то $7\ раз. = 32 - 4 = 28$ и $раз. = 4$; почему найдемъ такой рядъ чиселъ

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32.$$

В. Могутъ ли быть Ар прогрессіи уменьшающіяся? Ежели могутъ, то какимъ образомъ онѣ вычисляются?

От. Уменьшающіяся Ар. прогрессіи составляются чрезъ вычитаніе разности, и относящіяся сюда вычисленія производятся также по

объясненнымъ правиламъ; но только тѣ произведенія, въ которыя разность входитъ производителемъ, должно уже вычитать.

В. Составляются ли прогрессіи чрезъ умноженіе на цѣлое число или на дробь?

От. Составляются, и такія прогрессіи называютъ *Геометрическими.* Такъ ряды чиселъ

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458,...

2, 1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625,...

0,9; 0,09; 0,009; 0,0009. . .

суть прогрессіи Геометрическія, изъ коихъ первая составляется чрезъ умноженіе каждаго члена на 3, вторая — на 0,5, третья — на 0,1. Сіи и подобные имъ множители называются *знаменателями.*

В. Согласно съ порядкомъ изслѣдованія прогрессій Ариѳметическихъ должно спросить: какимъ образомъ опредѣляется послѣдній членъ прогрессіи Геометрической?

От. Для сего вторую изъ приведенныхъ для примѣра прогрессій Геометрическихъ напишемъ въ такомъ видѣ :

$$2; 2\times 0,5; \ 2\times 0,5\times 0,5; \ 2\times 0,5\times 0,5\times 0,5; \ 2\times 0,5\times 0,5\times 0,5\times 0,5; \ 2\times 0,5\times 0,5\times 0,5\times 0,5\times 0,5; \ldots$$

или

$$2, 2\times(0,5), \ 2\times(0,5)^2; \ 2\times(0,5)^3; \ 2\times(0,5)^4; \ 2\times(0,5)^5 \ldots$$

Изъ сего тотчасъ усматриваемъ, что *послѣдній членъ Геометрической прогрессіи равняется первому ея члену, помноженному на степень знаменателя, коей показатель равняется числу членовъ до искомаго.*

В. Но какъ должно найти сумму членовъ Г. прогрессіи ?

От Хотя сей вопросъ и можно разрѣшить Ариѳметическими средствами ; но какъ ето рѣшеніе не безъ затрудненій, и сверхъ того мы не будемъ имѣть въ немъ надобности,

то теперь оставляемъ его и возвратимся къ нему въ Алгебрѣ.

В. Послѣ сего остается сдѣлать одинъ вопросъ: какъ находятся средніе члены въ Геометрической прогрессіи?

От. Пусть требуется найти средній членъ между 18 и 54; поелику онъ долженъ быть во столько разъ болѣе 18, во сколько онъ менѣе 54; слѣд. изобразивши знаменатель чрезъ x, составимъ

$$ср.\ чл. = 18 . x,$$

$$ср.\ чл. = \frac{54}{x};$$

Отсюда

$$(ср.\ чл.)^2 = 18 . 54,$$

и потому

$$ср.\ чл. = \sqrt{18.54}.$$

УРОКЪ X.

О логариѳмахъ.

В. Ежели сличимъ двѣ прогрессіи, Ариѳметическую и Геометрическую, изъ коихъ первая начинается *нулемъ*, а вторая *единицею*; то какое можемъ вывести заключеніе?

От. Пусть сіи прогрессіи будутъ

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, . . . *Ариѳ.*

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, . . *Геом.*

Поелику ихъ можно написать въ такомъ видѣ:

0, 5, 2 5, 3.5, 4.5, 5.5, 6 5, . . .

1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, . .

то усматриваемъ тотчасъ, что *разность Ариѳметической прогрессіи въ каждомъ ея членѣ повторяется столько разъ, въ какую степень возводится знаменатель въ каждомъ*

соотвѣтствующемъ членѣ Геометрической прогрессіи. Впрочемъ сіе замѣчаніе есть слѣдствіе изъясненнаго на стр. 179 и 192.

В. Какую пользу можетъ принести сіе замѣчаніе?

От. Основываясь на немъ, посредствомъ членовъ одной прогрессіи можно опредѣлять члены другой.

Такъ въ Геом. прогрессіи десятой членъ будетъ 3^9 или 19683, и потому соотвѣтствующій членъ Ар. прогрессіи выйдетъ $9 . 5 = 45$. Наоборотъ ежели въ Ар. прог осьмой членъ есть 7.5, то такой же членъ въ Г. прогрессіи будетъ 3^7 или 2187.

В. По причинѣ таковой связи члены сихъ прогрессій не получаютъ ли особеннаго названія?

От. Члены Ар. прогрессіи называются *логариѳмами* соотвѣтствующихъ членовъ Геометр. прогрессіи Для изображенія сего названія употребляютъ Латинскую бук-

ву l. Такъ $10 = l.9$, $45 = l.19683$, $30 = l.729$, и пр.

В. Сей способъ опредѣленія однихъ чиселъ посредствомъ другихъ не можетъ ли быть употребленъ при разрѣшеніи вопросовъ?

От. Съ великою выгодою. Возьмемъ какіе нибудь два члена Г. прогрессіи, на пр. 3^4 и 3^6; произведеніе ихъ будетъ 3^{10}; слѣд. въ Ар. прогр. соотвѣтствующій членъ выйдетъ 10.5 или $4.5+6.5$. Но какъ 10.5 или 50 есть логариѳмъ числа 3^{10} или 59049 и 4.5 или $20 = l.3^4$, 6.5 или $30 = l.3^6$; то $l.3^{10} = l.(3^4.3^6) = l.3^4 + l.3^6$, т. е. *логариѳмъ произведенія равняется суммѣ логариѳмовъ каждаго производителя.*

В. Но поелику $(12)^2 = 12.12$, слѣд. $l.(12^2) = l.12 + l.12 = 2l.12$; также $(12)^3 = 12.12.12$; слѣд. $l.(12)^3 = l12 + l.12 + l.12 = 3\,l.12$. И такъ можно сказать: 1, *логариѳмъ квадрата равняется удвоенному логариѳму корня;* 2, *логариѳмъ куба*

равняется утроенному логариѳму корня?

От. Слѣдствіе справедливое и весьма полезное для вычисленій.

В. Нѣтъ ли подобныхъ правилъ для частнаго и извлеченія корней?

От. Они суть обратные предыдущимъ; ежели $\frac{15}{3}=5$, то $15=5.3$, и по изъясненному $l\,15 = l\,3 + l\,5$; отсюда $l\,5 = l\frac{15}{3} = l\,15 - l\,3$; слѣд. *логариѳмъ частнаго или дроби равняется разности логариѳмовъ дѣлимаго и дѣлителя, или числителя и знаменателя.* Но какъ $\sqrt{25}=5$ и $25 = 5^2$, то $l25 = 2l5$; отсюда

$l5 = l\sqrt{25} = \frac{l25}{2}$. Такимъ же обра-

зомъ найдемъ $l\sqrt[3]{7} = \frac{l7}{3}$. И такъ *ло-*

гариѳмъ квадратнаго или кубическаго корня равняется логариѳму квадрата или куба, раздѣленному на 2 или на 3.

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что посредствомъ логариѳмовъ умноженіе и дѣленіе превращаются въ сложеніе и вычитаніе; возвышеніе въ квадратъ и кубъ въ умноженіе на 2 и на 3; наконецъ извлеченіе квадратнаго и кубическаго корня въ дѣленіе на 2 и на 3.

В Теперь должно показать примѣры сихъ вычисленій?

От. Нѣтъ еще: все сказанное можно вывести изъ сравненія всякихъ двухъ прогрессій Ариѳметической и Геометрической; для вычисленій же надобно выбрать такія прогрессіи, которыя были бы согласны съ общимъ основаніемъ счета, и въ которыхъ бы члены опредѣлялись взаимно съ возможною удобностью. Такія прогрессіи суть

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. . . Ариѳ.

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, . . . Геом.

Изъ нихъ видимъ, что если число *выражено* 1 *съ нулями, то логариѳмъ его равняется числу нулей*: $l\,1000=3$, $l\,10000=4$, $l\,1000000=6$, и пр.

В. Но какъ найти логариѳмы чиселъ, содержащихся между 1 и 10, 10 и 100, 100 и 1000, и пр.?

От. Видѣли уже, что въ Ариѳметической и Геометрической прогрессіяхъ можно находить средніе члены: посему средній членъ между 0 и 1 будетъ логориѳмъ средняго члена между 1 и 10, т. е. $\frac{0+1}{2}=0{,}5=l.\sqrt{1.10}=l.\sqrt{10}$, $\frac{2+3}{2}=l\sqrt{100000}$, и пр. При семъ замѣтимъ, что логариѳмы чиселъ, содержащихся между 1 и 10 суть дроби, между 10 и 100 — 1 съ дробями, между 100 и 1000 — 2 съ дробями; и пр. Цѣлыя числа логариѳмовъ называются *характеристиками*; слѣд. *характеристика всякаго*

логариѳма содержитъ столько единицъ, сколько въ данномъ числѣ цыфръ безъ одной; ибо числа, заключающіяся между 1 и 10, выражаются *одною* цыфрою, между 10 и 100 — *двумя* цыфрами, и пр.

В. Изъясненный способъ находить логариѳмы чиселъ, содержащихся между 1 и 10, 10 и 100, и пр, кажется весьма затруднителенъ и неточенъ; на пр. $\sqrt{10}$ болѣе 3, но менѣе 4, и пр.?

От. Совершенно справедливо: но въ высшихъ изчисленіяхъ предложимъ весьма простыя средства для составленія *таблицъ логариѳмовъ* и притомъ съ такою степенью приближенія, которая удовлетворяетъ совершенно строжайшимъ вычисленіямъ На пр. ежели требуется найти $\sqrt{5}$, то на основаніи свойствъ логариѳмовъ помощію таблицъ вычисляемъ сей корень вдругъ съ пятью десятичными; именно: $\sqrt{5} = 2{,}23607$.

В. Надобно объяснить сіе вычисленіе?

От. Лучшія таблицы логариѳмовъ составлены Каллетомъ, и потому сперва выпишемъ изъ Предисловія къ онымъ существенныя объясненія ихъ употребленія.

I. *Даннаго числа найти логариѳмъ помощію таблицъ?*

1. Ежели число менѣе 1200, то оно заключается въ одномъ изъ столбцевъ, означенныхъ буквою *N*, и напечатанныхъ на страницахъ, отмѣченныхъ Греческимъ названіемъ *chiliade*; логариѳмъ сего числа помѣщенъ противъ него въ столбцѣ, имѣющемъ надпись *Log.* Взявши сей логариѳмъ, надобно приписать къ нему характеристику по вышеупомянутому правилу.

Такъ $log. 5 = 0,69897000$, $l\, 804 = 2,90525605$, и пр.

2. Ежели число выражено четырьмя цыфрами, то надобно искать его въ таблицахъ, слѣдующихъ за

Chiliade 1; нашедши его въ столбцѣ, означенномъ буквою *N*, логариѳмъ его берется въ столбцѣ, отмѣченномъ *нулемъ*; притомъ первыя три десятичныя печатаются выше даннаго числа, а послѣднія четыре противъ онаго. Характеристика такого числа есть 3. Такъ $l.5624=3{,}7500453$, $l.5580 = 3{,}7466342$.

3. Ежели число выражено пятью цыфрами, то надобно сперва первую изъ нихъ съ правой руки отдѣлить и найти въ таблицахъ число, содержащее остальныя четыре цыфры; потомъ для первыхъ трехъ десятичныхъ логариѳма берется число, поставленное выше найденнаго въ столбцѣ, означенномъ *нулемъ*, а для послѣднихъ четырехъ десятичныхъ въ столбцѣ, отмѣченномъ отдѣленною цыфрою. Характеристика такого числа равняется 4. Такъ $l\,56984 = 4{,}7557529$, $l\,98007 = 4{,}9912571$, $l\,98640 = 4{,}9940531$.

4. Когда число содержитъ шесть цыфръ тогда характеристика его логариѳма будетъ 5; десятичныя же цыфры онаго находятся слѣдующимъ образомъ: отдѣливши отъ даннаго числа одну цыфру съ правой руки, получимъ число, содержащее только 5 цыфръ; слѣд. логариѳмъ его должно найти по изъясненному въ предыдущемъ случаѣ. Потомъ въ столбцѣ, означенномъ словомъ *dif.*, берутъ ту изъ разностей, которая ближе къ первымъ четыремъ цыфрамъ даннаго числа; въ ней находятъ отдѣленную цыфру отъ онаго и по правую ея сторону число, которое должно придать къ найденному логариѳму для числа, состоящаго изъ пяти цыфръ. Такъ $l\,700267 = 5{,}8452593 + 43 = 5{,}8452636$.

5. Ежели число выражено семью или осьмью цыфрами, то характеристика его логариѳма будетъ 6 или 7; для сысканія же десятичныхъ цыфръ должно отъ даннаго числа

отдѣлить съ правой руки двѣ или три цыфры и найти логариѳмъ оставшагося числа изъ пяти цыфръ; потомъ берется ближайшая разность помножается на отдѣленныя цыфры, отъ произведенія отбрасывается двѣ или три цыфры по числу цыфръ отдѣленныхъ и остатокъ придается къ найденному уже логариѳму. Такъ $l\,3456789 = 6{,}5386617 + 112$, поелику ближайшая разность есть 126 и $126 \times 89 = 11214$.

6. Наконецъ если число выражено болѣе, нежели осьмью цыфрами, то надобно разбивать его на два производителя, содержащихъ по столько цыфръ, что логариѳмы ихъ можно найти по одному изъ предложенныхъ правилъ: сумма сихъ логариѳмовъ будетъ искомый логариѳмъ даннаго числа.

II. *Данному логариѳму сыскать соотвѣтствующее число въ таблицахъ?*

1. Вопервыхъ замѣтимъ, что при нахожденіи соотвѣтствующихъ чиселъ не должно обращать вниманіе на характеристику даннаго логариѳма: по ней назначается только число цыфръ искомаго числа, какъ объяснено будетъ въ нижеслѣдующемъ.

2. Ежели данный логариѳмъ несодержится между логариѳмами, находящимися въ столбцахъ, отмѣченныхъ словомъ *chiliade*; то надобно прежде найти первыя три десятичныя его цыфры въ столбцахъ, надписанныхъ *нулемъ*, потомъ должно спуститься по сему столбцу до четырехъ цыфръ, ближайшихъ къ даннымъ, и въ ихъ строкѣ приискивать сіи данныя. Нашедши, замѣчаютъ цыфру столбца, которую приписываютъ къ четыремъ соотвѣтствующимъ цыфрамъ въ столбцѣ подъ *N*. Такъ 4,5178159 есть логариѳмъ числа 32947 Если бы при данномъ логариѳмѣ находилась характеристика

7, то онъ соотвѣтствовалъ бы числу 32947000, потому что $32947000 = 32947 \times 1000$ и $l32947000 = l32947 + l1000 = l32947 + 3$. Но когда бы характеристика была 2, то число было бы 329,47: ибо $329{,}47 = \frac{32947}{100}$, $l329{,}47 = l32947 - l100 = l32947 - 2$.

3. Ежели послѣднихъ четырехъ десятичныхъ цыфръ даннаго логариѳма не найдемъ ни въ одномъ столбцѣ, то надобно взять ближайшія меньшія, найти разность и въ ближайшей разности искать число, которое или было бы совершенно равно сей разности логариѳмовъ или отличалось бы только *единицею:* цыфра по лѣвую руку сего числа будетъ шестою цыфрою искомаго соотвѣтствующаго числа. Такъ 2,5386717 есть $l.345{,}678$: ибо ближайшія четыре цыфры суть 6617

въ седьмомъ столбцѣ, потомъ 6717 —6617=100 и въ ближайшей разности находится 101 и подлѣ цыфра 8.

4. Наконецъ если пожелаемъ имѣть число въ семь или восемь цыфръ, то къ разности между послѣдними четырьмя цыфрами даннаго логариѳма и ближайшими къ нимъ взятыми изъ таблицъ должно приписать три нуля и вышедшее число раздѣлить наближайшую разность: въ частномъ получимъ три послѣднія цыфры искомаго соотвѣтствующаго числа. Такъ 0,4971499 соотвѣтствуетъ 3,1415928, поелику ближайшія четыре цыфры найдены въ пятомъ столбцѣ, разность между ними и данными = 128, и какъ ближайшая изъ разностей есть 138,

то $\frac{128000}{138} = 928$.

Теперь можно объяснить, какимъ образомъ извлеченъ квадратный

корень изъ 5. Назвавши его x, получимъ

$$lx = \frac{l5}{2} = \frac{0,6989700}{2} = 0,3494850.$$

Потомъ находимъ соотвѣтствующее число 2,23607 по 3 случаю.

В. Не встрѣчаются ли другія затрудненія при вычисленіяхъ посредствомъ логариѳмовъ?

От. Для объясненія оныхъ разрѣшимъ слѣдующія задачи:

$$1,\ x = \frac{42,212 \cdot \frac{3}{5}}{0,04}.$$

Сперва перемѣняю сіе выраженіе такимъ образомъ:

$$x = \tfrac{42212}{1000} \times \tfrac{3}{5} : \tfrac{4}{100};$$

или

$$x = \frac{42212 \times 3 \times 100}{1000 \times 5 \times 4};$$

потомъ по свойствамъ логариѳмовъ составляю

$$lx = (l42212 + l3 + l100) - (l1000 + l5 + l4);$$

послѣ сего нахожу

$$\begin{array}{rr} l42212 = 4{,}6254359 & l1000 = 3{,}0000000 \\ l3 = 0{,}4771212 & l5 = 0{,}6989700 \\ l100 = 2{,}0000000 & l4 = 0{,}6020600 \\ \hline 7{,}1025571 & 4{,}3010300 \end{array}$$

отсюда

$$\begin{array}{rr} & 7{,}1025571 \\ & 4{,}3010300 \\ \hline lx = & 2{,}8015271 \end{array}, \quad x = 633{,}18.$$

2. $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$. По свойству логариѳмовъ составляю $lx = \frac{1}{2}(l5 - l7)$; но какъ $l5$ менѣе $l7$, то помножаю 5 на 10; получаю

$$lx = \tfrac{1}{2}(l50 - l7 - l10),$$

вычисляю:

$$\begin{array}{rr} l50 = & 1{,}6989700 \\ l7 = & 0{,}8450980 \\ \hline & 0{,}8538720 \end{array}$$

посему

$$lx = 0{,}4269360 - 0{,}5\,;$$

но какъ опять вычитанія произвести не можно, то съ обѣихъ сторонъ придаю еще $l10$; такъ

$$lx+l10=l(10x)=1{,}4269360-0{,}5$$
$$=0{,}9269360\,;$$

слѣд.

$$10x=8{,}45154\,,\quad x=0{,}845154.$$

$$3,\ x = \frac{\sqrt[3]{0{,}00027}}{32{,}41}\,;$$ отсюда

$$lx = \tfrac{1}{3}l0{,}00027 - l32{,}41$$

Вычисляю:

$$\begin{array}{rr} l27=1{,}4313638 & l3241=3{,}5106790 \\ l100000=5{,}0000000 & l100=2{,}0000000 \\ \hline \overline{4}{,}4313638 & l32{,}41=1{,}5106790 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{3}l0{,}00027 = 0{,}1437879 - 1{,}3333333$$

$$lx = 0{,}1437879 - 2{,}8440123.$$

Чтобъ сдѣлать вычитаніе возможнымъ, придаю съ обѣихъ сторонъ $l1000$, выйдетъ

$l(1000x) = 3,1437879 - 2,8440123 = 0,2997756$,

$$x = 0,0019942.$$

4. Ежели со 100 рублей получается росту 5 рублей, то какъ возрастутъ 12678 р. въ 14 лѣтъ?

Рѣшеніе сего вопроса должно произвести такимъ образомъ: ежели чрезъ годъ 100 р. превратятся во 105, то *одинъ* рубль дастъ сумму во 100 разъ меньшую, именно: $\frac{105}{100}$; слѣд вмѣсто 12678 р. получимъ чрезъ годъ $\frac{105}{100}.12678$ р. Разсуждая такимъ же образомъ, найдемъ что въ два года данный капиталъ возрастетъ до $(\frac{105}{100})^2.12678$; въ три года до $(\frac{105}{100})^3.12678$; въ 4 года до .... $(\frac{105}{100})^4.12678$, ... въ 14 лѣтъ до $(\frac{105}{100})^{14}.12678$. И такъ надобно вычислить помощію логариѳмовъ

$$x = (\tfrac{105}{100})^{14}.12678,$$

или

$$lx = l12678 + 14(l105 - l100).$$

Найдемъ

$$\begin{aligned} l\,105 &= 2{,}0211893 \\ l\,100 &= 2{,}0000000 \\ \hline &\ 0{,}0211893 \\ &\ \qquad\qquad 14 \\ \hline &\ 0{,}2966502 \\ l\,12678 &= 4{,}1020507 \\ \hline lx &= 4{,}3987009 \end{aligned}$$

слѣд. искомый капиталъ будетъ 25043 р. и 83 к.

5. Въ Государствѣ 40000 жителей и каждый годъ народонаселенiе увеличивается 100 долею: *спр.* сколько жителей будетъ чрезъ 25 лѣтъ?

Послику чрезъ годъ число жителей будетъ $40000 + \frac{40000}{100} = \ldots$ $\frac{101}{100}\,40000$, то чрезъ два года выйдетъ

$$\frac{101.40000}{100} + \frac{101.40000}{100}.\frac{1}{100} = \ldots$$

$$\frac{101.40000}{100} \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{101}{100}\right)^2\,40000;$$

слѣд. чрезъ 25 лѣтъ найдется

$$x = \left(\tfrac{101}{100}\right)^{25} \cdot 40000,$$

и $$lx = l40000 + 25\,(l101 - l100).$$

Вычисленіе :

$$\begin{array}{r} l101 = 2{,}0043214 \\ l100 = \underline{2{,}0000000} \\ 0{,}0043214 \\ \underline{25} \\ 0{,}1080350 \\ l40000 = \underline{4{,}6020600} \\ lx = 4{,}7100950 \end{array}$$

и $x = 51297.$

О МѢРАХЪ, УПОТРЕБИТЕЛЬНѢЙШИХЪ ВЪ РОССІИ.

I. *Мѣры длины.*

Верста содержитъ 500 саженъ.
Сажень ———— 3 аршина или 7 фут. Англин.
Аршинъ ———— 16 вершковъ.
Тоазъ или Париж. сажень содержитъ 6 футовъ.
Футъ содержитъ 12 дюймовъ.
Дюймъ ———— 12 линій.
Линія ———— 12 пунктовъ (poins).

Примѣчаніе. На 15 Франц. фут. полагается 16 Англинскихъ.

II. *Мѣры вѣса.*

Пудъ содержитъ 40 фунтовъ.
Фунтъ ———— 32 лота.
Лотъ ———— 3 золотника.

Аптекарской фунтъ содерж. 12 унц.
Унцъ содержитъ 2 лота.
Лотъ ———— 4 драхмы.
Драхма ———— 3 скрупола.
Скруполъ ——— 20 гранъ.
Французской фунтъ содерж. 2 марки.
Марка содержитъ 8 унцовъ.
Унцъ ———— 24 скрупола.
Скруполъ ——— 24 грана.

Примѣчаніе. На 6 Рус. фун. полагается 5 ф. Французскихъ.

III. *Мѣры времени.*

Годъ (простой) 365 дней.
День или сутки 24 часа.
Часъ содержитъ 60 минутъ.
Минута ———— 60 секундъ.

IV.

При нынѣшней винной продажѣ ведро раздѣляется на 10 частей или штофовъ; низшія же дѣленія соображены съ цѣною вина.

V. *Деньги.*

Имперіалъ	содержитъ	10	руб. сереб.
Полуимперіалъ	———	5	руб. ——
Рубль	———	10	гривенъ.
Гривна	———	10	копеекъ.
Копейка	———	2	деньги.
Деньга	———	2	полушки.

VI. *Мѣра бумаги.*

Стопа	содержитъ	20	дестей.
Десть	———	24	листа.

VII. *Метрическія мѣры.*

Не нужно здѣсь упоминать, что мѣры должны быть однородны съ измѣряемыми величинами; но нельзя не замѣтить, что для ихъ совершенства необходимы слѣдующія качества: 1) онѣ должны быть постоянны; слѣдственно для сего надобно избрать въ природѣ такой предметъ, котораго величина никогда бы не перемѣнялась ни естественно, ни искусственно, и чтобъ всѣ онѣ зависѣли отъ одной изъ нихъ; 2) ихъ высшія и низшія дѣленія не могутъ быть

произвольныя; но надобно принять такія, которыя представляли бы наименьшія затрудненія при выкладкахъ; наконецъ 3) названія сихъ мѣръ, при возможной простотѣ, должны показывать ихъ отношенія къ основной мѣрѣ.

Нетрудно усмотрѣть, что всѣ мѣры, употребляемыя Европейскими народами, не имѣютъ сихъ достоинствъ, и по свойству своему, особенно же по безконечному разнообразію, должны затруднять не токмо ученыхъ, но даже людей всякаго состоянія. Мѣры пространства суть важнѣйшія; но кто знаетъ, отъ какого предмета въ природѣ взяты оныя? На примѣръ, съ какою неизмѣнною вещью можно сравнить употребительнѣйшую изъ нихъ *футъ*? Слово сіе есть Голландское, означаетъ человѣческую *ступень* или *плюсну*: прекрасный выборъ! ступень великана и ступень пигмея суть футы. Скажутъ, что тутъ берет-

ся ступень человѣка средняго роста: а чѣмъ опредѣляется этотъ средній ростъ? тѣми же футами. И такъ всякой долженъ согласиться, что надобно было исправить столь важный недостатокъ; Французскій конвентъ предписалъ составить особенный комитетъ изъ славнѣйшихъ Ученыхъ Франціи: *Лапласа, Лагранжа, Монжа, Борды, Лефавра-Жино* и проч.

Сіи великіе умы исполнили желаніе правительства такъ, какъ надобно было ожидать отъ ихъ обширной учености. Видя, что всѣ предметы, находящіеся на землѣ, измѣняются до безконечности, они обратили свое вниманіе на самую землю. По точнѣйшему измѣренію *Деламбра* и *Мешеня*, дуга Парижскаго меридіана, заключающаяся между экваторомъ и полюсомъ, равняется 5130740 тоазамъ или 30784440 футамъ: вотъ величина

постоянная; если бы ее принять за основаніе, то мѣры получили бы вышеупомянутыя два первыя качества. Такъ и сдѣлано. Французскіе Ученые взяли отъ нее *десятимилліонную часть* и назвали *метромъ*. Сей-то метръ служитъ основаніемъ для новыхъ мѣръ, извѣстныхъ подъ именемъ *метрическихъ*.

Не поступая далѣе, покажемъ отношеніе метра къ Русскому аршину. Поелику одинъ метръ .... = 0,5130740 т. или 3.0784440 футамъ, при томъ на 15 Французскихъ полагается 16 Англинскихъ футовъ; слѣдов. по *тройному правилу* найдется, что метръ содержитъ въ себѣ 1,407 ар. или 1 ар. + 1 четв. + 2,5 вер. или 22,5 вер. Это столь близко, что симъ числомъ можно всегда замѣнять метръ, не опасаясь впасть въ чувствительную погрѣшность.

Для измѣренія поверхностей принятъ квадратъ, коего сторона равняется десяти метрамъ; сей квадратъ называется *аромъ* (are); слѣд. аръ соотвѣтствуетъ 22,09 квадр. саженямъ.

Кубъ составленный изъ метра и названный *стеромъ* (stére), употребляется для измѣренія толстоты тѣлъ твердыхъ, на примѣръ, дровъ; *литръ* (litre) же есть кубъ, коего ребро есть десятая доля метра, и который служитъ мѣрою вмѣстимостей (capacité) или жидкостей. Переведя на Русскую мѣру, увидимъ, по предыдущему, что стеръ есть кубъ изъ 0,47 саж, а литръ изъ 0,04 саж.; послѣднимъ надобно бы замѣнить наше *ведро*, которое изъ всѣхъ нашихъ мѣръ есть несовершеннѣйшая.

Чтобъ мѣры вѣса произвести также отъ метра, Французскіе Ученые за единицу онаго приняли вѣсъ

перегнатой воды, заключенной въ кубѣ изъ сотой доли метра или изъ 0,0047 сажени. Оказалось, что кубъ изъ сей доли или *граммъ* перегнатой воды, при высшей ея густотѣ, равняется 18,841 гранамъ (grains) марочнаго Французскаго вѣса.

Русской фунтъ = 409,5 грам.: слѣд. 1 граммъ = $\frac{960}{4095}$ = 0,23443 золотника; сіе число отъ надлежащаго отличается менѣе, нежели $\frac{1}{100000}$ долею золотника.

Наконецъ самыя монеты зависятъ отъ метра: франкъ есть 5 граммовъ или 1,17215 или 1,2 нашего золотника, съ десятою долею лигатуры.

Приведши всѣ роды мѣръ къ желаемому единству, остается раздѣлить ихъ удобнѣйшимъ образомъ. Ничѣмъ не можно объяснить странности дѣленія мѣръ, употребляемаго донынѣ въ Европѣ; въ немъ не соблюдено никакой постепенности, не видно никакого основанія и опущена изъ

виду главная онаго цѣль, т. е. чтобъ оно представляло наименьшія затрудненія для выкладокъ. Сіи затрудненія состоятъ въ неудобствѣ приводить большія мѣры въ меньшія и обратно. На примѣръ, сколько разъ надобно повторить умноженіе, чтобъ узнать въ верстѣ число вершковъ, или въ пудѣ золотниковъ? Но ещу болѣе трудностей встрѣчаемъ въ обратной задачѣ; для вычисленія, требующаго точности, надлежитъ повѣрять ее, т. е. передѣлывать раза три. Непонятно, для чего установители сихъ дѣленій, имѣя предъ собою прекрасный образецъ, избрали совсѣмъ другой путь. Здѣсь говорится объ основаніи счета, принятаго почти у всѣхъ народовъ. Французскіе Ученые чувствовали его достоинство, и приняли для своихъ мѣръ десятеричное дѣленіе, какъ сообразнѣйшее съ закономъ нумераціи, и чрезъ которое вычисленія надъ мѣрами превращаются въ перестановку

запятой къ правой или лѣвой рукѣ. Но чтобъ довершить свое изобрѣтеніе, они ввели и номенклатуру, состоящую изъ немногихъ словъ и способную выражать самыя отношенія мѣръ. Для означенія высшихъ мѣръ, которыя составляются изъ десятковъ, сотенъ и проч. метра, грамма, и проч. приняли Греческія слова:

Myria, kilo, hecto, déca.
десятки тысячь, тысяча, сотня, десятокъ; а для низшихъ, составляющихся изъ десятичныхъ долей метра, грамма и проч. употребили слова Латинскія:

déci, centi, milli.
десятыя, сотыя, тысячныя доли.

Слѣдуя сему условію, *килограммъ*, на примѣръ, будетъ равняться тысячѣ граммовъ, а *миллиграммъ*, — тысячной долѣ грамма.

Изъ сего сказаннаго можно усмотрѣть, что метрическія мѣры имѣютъ всѣ желаемыя совершенства. Если существуютъ еще препятствія

для принятія ихъ во всеобщее употребленіе: то, по крайней мѣрѣ, Ученые должны уважать сіе изобрѣтеніе, дорожить имъ и навсегда оставаться признательными къ трудамъ мужей, желавшихъ принести истинную пользу для всѣхъ народовъ и для всѣхъ временъ.

ОБЩАЯ ТАБЛИЦА,

ПОКАЗЫВАЮЩАЯ ОТНОШЕНІЯ МЕТРИЧЕСКИХЪ МѢРЪ КЪ РУССКИМЪ.

I. *Мѣры длины.*

Одинъ метръ = 22,5$^{вер.}$
Декаметръ = 225
Гектометръ = 2250
Километръ = 22500
Дециметръ = 2,25
Центиметръ = 0,225.
Миллиметръ = 0,0225.

II. *Мѣра поверхностей.*

Одинъ аръ = 22,09 кв. саж.
Декааръ = 220,9.
Гектоаръ = 2209.
Килоаръ = 22090.
Деціаръ = 2,209.
Центіаръ = 0,2209.
Милліаръ = 0,02209.

III. *Мѣры жидкостей.*

Одинъ литръ = 11,543176 куб. вер.
Декалитръ = 115,43176.
Гектолитръ = 1154,3176
Килолитръ = 11543,176.
Децилитръ = 1,1543176
Центилитръ = 0,11543176.
Миллилитръ = 0,011543176.

IV. *Мѣры вѣса.*

Одинъ граммъ = 0,23443 зол.
Декаграммъ = 2,3443.
Гектограммъ = 23,443.
Килограммъ = 234,43
Дециграммъ = 0,023443.
Центиграммъ = 0,0023443.
Миллиграммъ = 0,00023443.

КОНЕЦЪ.

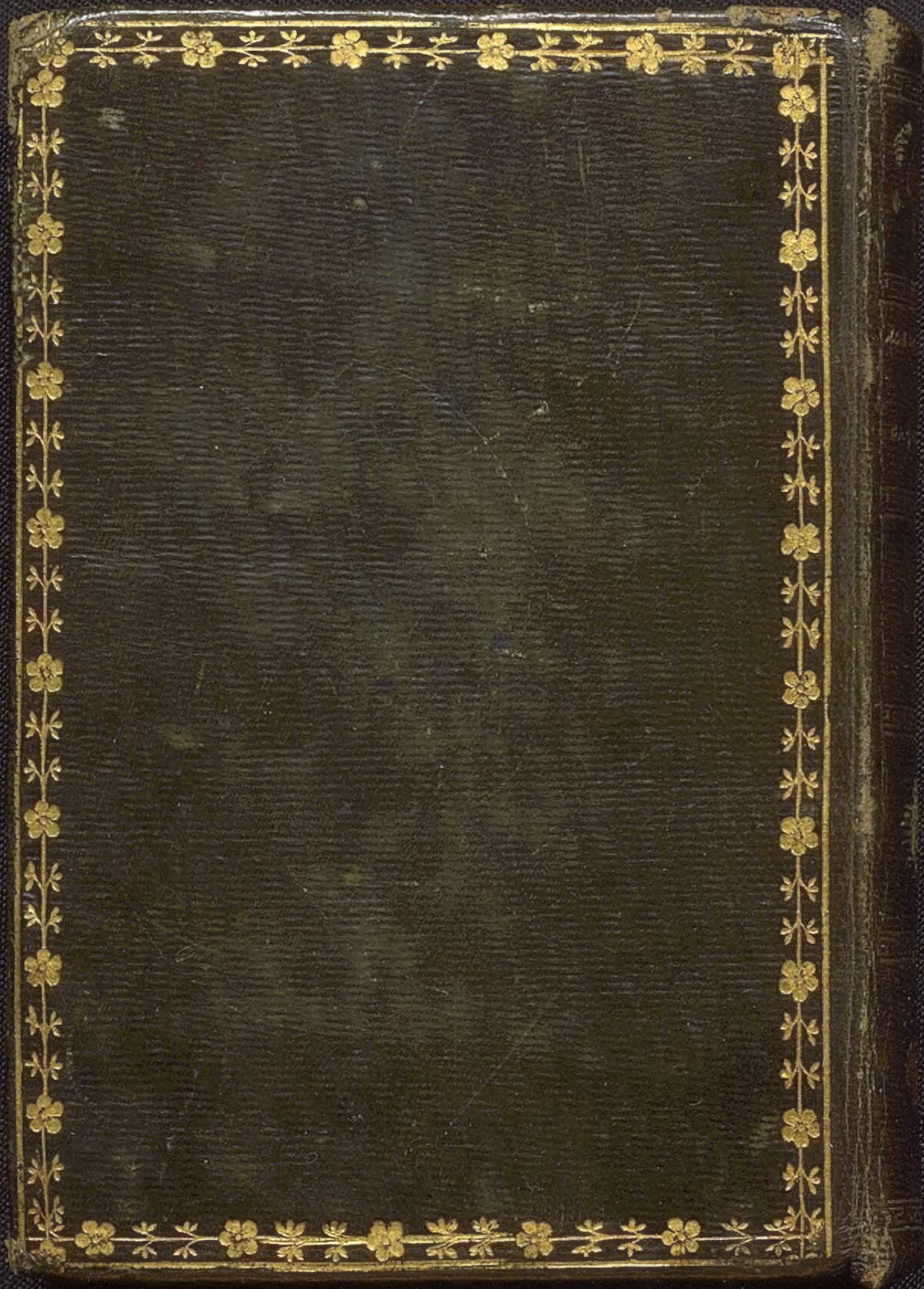


~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

ОГЛАВЛЕНІЕ.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

ПОГРѢШНОСТИ.

	Напечатано:	*Читай:*
Стр. 5, строка 7.	*девять.*	*десять.*





математ

енциклоп



